차 례

머 리 말

위대한 령도자 **김정일**원수님께서는 다음과 같이 말씀하시였다.

《기초과학교육에서는 수학교육을 강화하는것이 특별히 중요합니다. 수학은 모든 자연과학의 기초의 기초입니다.》

수학은 모든 자연과학의 기초의 기초이며 수학을 모르고서는 과학기술분야에서 나서는 모든 문제들을 원만히 풀어나갈수 없다.

특히 중학교 수학교육은 학생들의 과학적인 사고능력을 키우는데서 매우 중요한 의의를 가진다.

이 참고서는 제1중학교를 비롯한 중학교에서 취급하고있는 수학교육내용을 기본으로 하면서 현실발전의 요구에 맞게 중학생들의 전반적인 수준에 맞으면서도 수학지식들사이의 긴밀한 호상련관을 지어주기 위한 문제들과 사고를 보다 폭넓고 깊이있게 키워주기 위한 새로운 형태의 문제들로 구성되여있다.

대수, 기하, 해석수학초보 등의 여러가지 지식들을 13개 부분으로 나누고 부분별로 1) 문제풀이방법, 2) 련습문제, 3) 자체시험문제 등으로 갈라서 내용별로, 형태별로 묶어주었으며 여러가지 시험문제들도 제시하였다.

우리는 분과 초를 아껴가며 열심히 학습하여 강성대국건설을 떠메고나갈 유능하고 실력있는 인재들로 자라나야 한다.

1. 모임과 명제, 함수

1) 문제풀이방법

례 1. 전체모임이 E={ $x \mid x^2 - 22x + 40 < 0$ (x ∈Z)}, 부분모임이 A={ $x \mid x = 4k - 1$ (k ∈Z)}, B={ $x \mid x = 3k$ (k ∈Z)}, C={20이하의 씨수}, D={ $x \mid x = 2k$ (k ∈Z)}일 때 다음 모임을 구하여라.

A∩B, A∪B, B∩C, $\overline{D}$, C∩$\overline{D}$, A∩D, $\overline{C \cap \overline{D}}$, $\overline{C}$∪D

(풀이) E={ $x \mid 2 < x < 20$ (x ∈Z)}이므로

A∩B={3, 15}
A∪B={3, 6, 7, 9, 11, 12, 15, 18, 19}
B∩C={3}
$\overline{D}$={3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}
C∩$\overline{D}$={3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}
A∩D=∅
$\overline{C \cap \overline{D}}$={4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18}
$\overline{C}$∪D={4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18}

례 2. 전체모임이 E={1, 2, 3}, 부분모임이 $\overline{A \cup B}$={2}일 때 가질수 있는 A와 B의 쌍은 얼마인가?

(풀이) 문제의 의미로부터 A∪B={1, 3}이므로

A={1}, B={3}; A={3}, B={1}; A={1, 3}, B={3}; A={1, 3}, B={1}; A={3}, B={1, 3}; A={1}, B={1, 3}; A={1, 3}, B={1, 3}; A=∅, B={1, 3}; A={1, 3}, B=∅

즉 9개

례 3. 직각자리표계에서 점 (−2, 3)과 (2, 4)의 모임을 표시하는것은 (　)이다.

A. M={ x_1=−2, y_1=3, x_2=2, y_2=4}

B. N={(x, y) $\mid |x|$=2, y_1=3, y_2=4}

C. S={(x, y) $\mid$ (−2, 3), (2, 4)}

D. T={−2, 3, 2, 4}

(풀이) C

례 4. 1) P={ $x \mid x=2n+1\ (n\in Z)$ }, Q={ $x \mid x=4k\pm1\ (k\in Z)$ }일 때 P, Q의 관계는 (　)이다.

A. P⊂Q　　B. P=Q

C. P⊃Q　　D. P≠Q(또는 P⊄Q, P⊅Q)

2) x, $y\in$R이고 실수모임 P={ $s \mid s=x^3+3x+1$ }과 Q={ $t \mid t=y^2-3y+1$ }의 관계는 (　)이다.

A. P⊂Q　B. P=Q　C. P⊃Q　D. P≠Q

(풀이) 1) B

$\because\ 2n+1=4\cdot\frac{n}{2}+1$

n이 짝수이면 $\frac{n}{2}\in Z$

$\therefore\ 2n+1=4k+1$

n이 홀수이면

$$2n+1=4\cdot\frac{n}{2}+1$$

$$=4\cdot\left(\frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\right)+1=4\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)-1$$

$\therefore\ \frac{n+1}{2}\in Z$ 즉 $2n+1=4k-1$

$\therefore$ P⊂Q

한편 $4k+1=2\cdot(2k)+1$

$2k\in$Z이므로 $4k+1=2n+1\ (n\in N)$

$4k-1=2\cdot(2k-1)+1$

$2k-1\in$Z이므로 $4k-1=2n+1\ (n\in N)$

$\therefore$ Q⊂P

$\therefore$ P=Q

2) B

$$s=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+1-\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$ 이므로

$$P=\left\{s \,\middle|\, s\geq-\frac{5}{4}\right\}$$

$$t=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+1-\frac{9}{4}=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

$$\mathrm{Q}=\left\{t \middle| t\ge -\frac{5}{4}\right\}$$

∴ P＝Q

례 5．두 모임이

$\mathrm{A}=\{x \mid \log_3(2-x)\le 1\}$, $\mathrm{B}=\{x \mid x^2-a(a+1)x+a^3<0\}$

일 때 B⊂A가 성립하기 위한 a의 값범위를 구하여라.

(풀이) $\log_3(2-x)\le 1$이므로 $\begin{cases}2-x\le 3\\2-x>0\end{cases}$

∴ $-1\le x<2$

$$x^2-a(a+1)x+a^3<0$$

$$(x-a)(x-a^2)<0$$

$a<x<a^2$ 또는 $a^2<x<a$

∴ $\mathrm{A}=\{x \mid -1\le x<2\}$

B⊂A이므로 $-1\le a<2$ 또는 $-1\le a^2<2$

∴ $-1\le a<\sqrt{2}$

례 6．$\mathrm{M}=\{x \mid x=a^2+1\ (a\in \mathrm{N})\}$, $\mathrm{P}=\{y \mid y=b^2-4b+5\ (b\in \mathrm{N})\}$

일 때 M⊂P임을 증명하여라.

(증명) 임의의 $x_0\in \mathrm{M}$에 대하여

$$x_0=a_0^2+1=(a_0+2)^2-4(a_0+2)+5$$

$a_0\in \mathrm{N}$이므로 $a_0+2\in \mathrm{N}$

∴ $x_0\in \mathrm{P}$ 즉 M⊂P

한편 $b=2$일 때 $y=1$ ∴ $1\in \mathrm{P}$

$x=a^2+1>0$이므로 $1\notin \mathrm{M}$

M≠P이므로 M⊂P

례 7．$\mathrm{A}=\{x \mid x^2-7+10\le 0\}$, $\mathrm{B}=\{x \mid x^2+ax+b<0\}$, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$,

$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{x \mid x-3<4\le 2x\}$일 때 a, b의 값을 구하여라.

(풀이) $\mathrm{A}=\{x \mid (x-2)(x-5)\le 0\}=\{x \mid 2\le x\le 5\}$

$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\{x \mid 2\le x<7\}$이므로

$$B=\{x \mid 5<x<7\}$$
$$=\{x \mid (x-5)(x-7)<0\}$$
$$=\{x \mid x^2-12x+35<0\}$$

즉 $a=-12$, $b=35$

례 8. $M=\left\{(x,\ y)\middle| y=\frac{1}{2}x^2\right\}$, $N=\{(x,\ y) \mid x^2+(y-a)^2=9\}$일 때

$M\cap N\neq\varnothing$의 필요충분조건을 말하여라.

(풀이) $M\cap N\neq\varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x^2+(y-a)^2=9 \end{cases}$ 는 실수풀이를 가진다.

$\Leftrightarrow$ 방정식 $(y-a)^2+2y=9$ 즉 $y^2-2(a-1)y+a^2-9=0$

의 풀이가 부 아닌 실수이다.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D=4(a-1)^2-4(a^2-9)\ge 0 \\ y_1+y_2=2(a-1)\ge 0 \\ y_1\cdot y_2=a^2-9\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3\le a\le 5$$

따라서 필요충분조건은 $a\in[3,\ 5]$이다.

례 9. 모임 $A=\{x \mid -2<x<4\}$, $B=\{x \mid |x|<a\}$가 주어졌다.

1) $A\supset B$일 때 실수 a의 값범위를 구하여라.

2) $A\cap\overline{B}$일 때 실수 a의 값범위를 구하여라.

(풀이) 1) $a\le 0$이면 $|x|<a$의 풀이모임은 $\varnothing$

즉 $a\le 0$일 때 $B=\varnothing\subset A$

$a>0$일 때

$$\begin{cases} B=\{x \mid -a<x<a\} \\ B\subset A \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a<4 \\ -a\ge -2 \\ a>0 \end{cases} \leftrightarrow 0<a\le 2$$

따라서 $a\in(-\infty,\ 2]$일 때 $B\subset A$가 성립한다.

2) $a\le 0$일 때 $B=\varnothing \Rightarrow \overline{B}=R \Rightarrow A\cap\overline{B}=A\cap R=A\neq\varnothing$

$a>0$ 일 때 $B=\{x \mid -a<x<a\} \Rightarrow \overline{B}=\{x \mid x\ge a$ 또는 $x\le a$, $a>0\}$

한편 $A \cap \overline{B} = \varnothing \Rightarrow \begin{cases} a \geq 4 \\ -a < 2 \end{cases} \Rightarrow a \geq 4$

$\therefore a \in [4, +\infty)$

례 10. 다음 명제의 거꿀, 안, 거꿀안명제를 쓰고 그 진리성을 밝혀라.

1) $x, y \in \mathrm{R}$가 $xy = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다.

2) 실수 x, y가 $x \geq 2, y \geq 3$이면 $x + y \geq 5$이다.

3) 2등변3각형의 두 옆변에 그은 높이는 서로 같다.

(풀이) 1) 본명제: $x, y \in \mathrm{R}$가 $xy = 0$이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다. (참)

거꿀명제: $x, y \in \mathrm{R}$가 $x = 0$ 또는 $y = 0$이면 $xy = 0$이다. (참)

안명제: $x, y \in \mathrm{R}$가 $xy \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다. (참)

거꿀안명제: $x, y \in \mathrm{R}$가 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이면 $xy \neq 0$이다. (참)

2) 본명제: 실수 x, y가 $x \geq 2$, $y \geq 3$이면 $x + y \geq 5$이다. (참)

거꿀명제: 실수 x, y가 $x + y \geq 5$이면 $x \geq 2$, $y \geq 3$이다. (거짓)

안명제: 실수 x, y가 $x < 2$ 또는 $y < 3$이면 $x + y < 5$이다. (거짓)

거꿀안명제: $x + y < 5$이면 $x < 2$ 또는 $y < 3$이다. (거짓)

3) 본명제: 3각형이 2등변3각형이면 두 옆변에 그은 높이는 서로 같다. (참)

거꿀명제: 3각형에서 두 변에 그은 높이가 서로 같으면 이 3각형은 2등변3각형이다. (참)

안명제: 3각형이 2등변3각형이 아니면 임의의 두 변에 그은 높이는 같지 않다. (참)

거꿀안명제: 3각형의 임의의 두 변에 그은 높이가 같지 않으면 이 3각형은 2등변3각형이 아니다. (참)

례 11. f가 모임 R^{+}의 R우로의 넘기기이고

$$f: x \rightarrow \lg x \ (x \in \mathrm{R}^{+})$$

이면 1대1넘기기라는것을 증명하여라.

(증명) f가 넘기기이므로 f가 1대1이라는것만 밝히면 된다.

① $x_1 \neq x_2$ 이고 x_1, $x_2 \in R^+$라고 하면

$$y_1 = \lg x_1, \quad y_2 = \lg x_2$$

이고 y_1, $y_2 \in R$일 때

$$y_1 - y_2 = \lg x_1 - \lg x_2 = \lg \frac{x_1}{x_2}$$

$x_1 \neq x_2$ 이고 x_1, $x_2 \in R^+$이므로 $\frac{x_1}{x_2} \neq 1$

$\therefore \lg \frac{x_1}{x_2} \neq 0$ 즉 $y_1 \neq y_2$

② $y_3 \in R$이고 $y_3 = \lg x_3$ 이면 $x_3 = 10^{y_3} > 0$

$\therefore x_3 \in R^+$

따라서 R의 매 원소가 모두 R^+의 원상을 가진다.

①, ②로부터 f는 R^+의 R에로의 1대1넘기기이다.

례 12. 바른4각형 ABCD의 변길이가 1이다. 한 점 P가 점 A로부터 출발하여 바른4각형의 변들을 따라 A→B→C→D→A로 움직인다. P가 지나간 거리를 x라고 하고 AP^2을 y로 할 때 y를 x로 표시하고 그라프를 그려라.

(풀이) 점 P가 AB에서 움직일 때 실례로 점 E까지 운동했다고 하자. 그러면

$AE = x$,

$AP^2 = y = x^2 \ (x \in [0, 1])$

점 P가 BC에서 움직일 때 실례로 점 M까지 운동했다고 하면

$AB + BM = x$,

$AP^2 = y = AB^2 + BM^2 = 1 + (x-1)^2$

$(x \in [1, 2])$

D N C
M
Q
A E B

그림 1-1

점 P가 CD에서 운동할 때 실례로 N까지 운동했다면

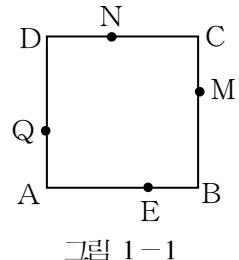
$$x = 2AB + CN, \quad ND = 3 - x$$

$\therefore AP^2 = AD^2 + ND^2 = 1 + (3-x)^2 \ (x \in [2, 3])$

점 P가 DA에서 운동할 때 실례로 Q까지 운동했다고 하면

$$x = 3 + DQ, \quad AQ = 4 - x,$$

$$AP^2 = y = AQ^2 = (4-x)^2 \ (x \in [3, 4])$$

따라서 다음의 함수의 식이 얻어진다.

$$f=\begin{cases} x^2 & (x\in[0,\ 1]) \\ (x-1)^2+1 & (x\in[1,\ 2]) \\ (3-x)^2+1 & (x\in[2,\ 3]) \\ (4-x)^2 & (x\in[3,\ 4]) \end{cases}$$

그라프는 그림 1－2와 같다.

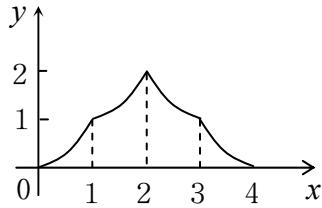



그림 1－2

례 13. 구간 [－1, 1]에서 2차함수 $f(x)=x^2+ax+4$의 최대값과 최소값을 구하여라.

(풀이) $f(x)=x^2+ax+4=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+4-\dfrac{a^2}{4}$

$-\dfrac{a}{2}<-1$ 즉 $a>2$일 때

$y_{최소}=f(-1)=5-a$, $y_{최대}=f(1)=5+a$

$-\dfrac{a}{2}>1$ 즉 $a<-2$일 때

$y_{최소}=f(1)=5+a$, $y_{최대}=f(-1)=5-a$

$-1\le-\dfrac{a}{2}<0$ 즉 $0<a\le2$일 때

$y_{최소}=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=4-\dfrac{a^2}{4}$, $y_{최대}=f(1)=5+a$

$0\le-\dfrac{a}{2}\le1$ 즉 $-2\le a\le0$일 때

$y_{최소}=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=4-\dfrac{a^2}{4}$, $y_{최대}=f(-1)=5-a$

례 14. 구간 [t, $t+1$]에서 함수 $f(x)=x^2+2x+5$의 최소값이 $\varphi(t)$이다. $\varphi(t)$의 함수식을 구하여라.

(풀이) $f(x)=(x+1)^2+4$

$x>-1$일 때 $f(x)$는 증가한다.

$x<-1$일 때 $f(x)$는 감소한다.

따라서

$$\varphi(x)=\begin{cases} t^2+2t+5 & (t>-1) \\ 4 & (-2\le t\le -1) \\ (t+1)^2+2(t+1)+5=t^2+4t+8 & (t<-2) \end{cases}$$

례 15. 함수 $y=f(x)$가 뜻구역 R에서 홀함수이다. $x>0$일 때 $f(x)=x(x-1)$이라고 하면 $f(x)$를 구하여라.

(풀이) $f(x)$가 R에서 홀함수이므로 $f(-x)=-f(x)$

$\therefore\ f(0)=-f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$

$x<0$일 때

$$f(x)=-f(-x)=-[-x(-x-1)]=-x(x+1)$$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -x(x+1) & (x<0) \end{cases}$$

례 16. 다음 함수들의 뜻구역을 구하여라.

1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{64-x^2}}+2^{-x}+(\lg x)^{-\frac{1}{2}}$

2) $y=\sqrt{\sqrt[3]{9}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}+\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x-2}{2x+1}}$

(풀이) 1) $\begin{cases} 64-x^2>0 \\ -x\in \mathrm{R} \\ \lg x>0 \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{cases} -8<x<8 \\ x\in \mathrm{R} \\ x>1 \end{cases}$

따라서 뜻구역은 $1<x<8$

2) $\begin{cases} \sqrt[3]{9}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\ge 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3x-2}{2x+1}\ge 0 \end{cases}$ $\quad\therefore \begin{cases} 3^{\frac{2}{3}}\ge 3^{-x} \\ 0<\dfrac{3x-2}{2x+1}\le 1 \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} x \geq -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 3 \text{ 또는 } x > \dfrac{2}{3} \text{ 또는 } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

따라서 뜻구역은 $\dfrac{2}{3} < x \leq 3$

례 17. 다음 함수의 값구역을 구하여라.

1) $\mathrm{T} = \log_x y + \log_y x$

2) $y = f(x)$ 가 방정식 $2x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 4y + 27 = 0$ 을 만족시킨다.

(풀이) 1) 뜻구역은 $\{x \mid 0 < x < 1 \cup x > 1\}$

$\log_x y = t$ 로 놓으면

$\mathrm{T} = t + \dfrac{1}{t}$ 즉 $t^2 + t\mathrm{T} + 1 = 0$

$\mathrm{D} = \mathrm{T}^2 - 4 \geq 0$ 이므로 $\mathrm{T} \geq 2$ 또는 $\mathrm{T} \leq -2$ 이다.

따라서 $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ 일 때 또는 $x > 1$, $y > 1$ 일 때 값구역은 $\mathrm{T} \in [2, +\infty)$ 이고 $0 < x < 1$, $y > 1$ 또는 $x > 1$, $0 < y < 1$ 일 때 값구역은 $\mathrm{T} \in (-\infty, -2]$ 이다.

2) $2x^2 - (2y+6)x + (y^2 - 4y - 27) = 0$ ($x \in \mathrm{R}$)

$$\mathrm{D} = [-(2y+6)]^2 - 8(y^2 - 4y - 27)$$
$$= -4y^2 + 56y - 180 \geq 0$$

$\therefore\ y^2 - 14y + 45 \leq 0$

따라서 값구역은 $5 \leq y \leq 9$

례 18. 1) 함수 $y = \left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2 - \log_{\frac{1}{4}} x^2 + 5$ ($2 \leq x \leq 4$)의 최대값과 최소값을 구하여라.

2) $y^2 = 4 - 4(x+2)^2$ 일 때 $x^2 + y^2$ 의 최대값과 최소값을 구하여라.

3) 함수 $y = \log_5 \sqrt{2x^2 - 4x + 7}$ 의 최소값을 구하여라.

(풀이) 1) $y=\left(\log_{\frac{1}{4}} x-1\right)^2+4$

따라서 $2 \le x \le 4$일 때 단조함수이고

$x=2$일 때 $\log_{\frac{1}{4}} x=\log_{\frac{1}{4}} 2=-\frac{1}{2}$

$x=4$일 때 $\log_{\frac{1}{4}} x=\log_{\frac{1}{4}} 4=-1$

$y_{최소}=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+4=\frac{25}{4}$, $y_{최대}=2^2+4=8$

2) $x^2+y^2=x^2+4-4(x+2)^2$

$=-3x^2-16x-12=-3\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$

$y^2=4-4(x+2)^2$이므로 $(x+2)^2 \le 1$

$\therefore\ -3 \le x \le -1$

$x=-\frac{8}{3}$일 때 x^2+y^2은 최대값 $\frac{28}{3}$을 가지고 $x=-1$ 일 때 x^2+y^2은 최소값 1을 가진다.

3) 2차3마디식 $2x^2-4x+7$에서 $a=2>0$

$\mathrm{D}=(-4)^2-4\cdot 2\cdot 7<0$

$2x^2-4x+7=2(x-1)^2+5$

$x=1$일 때 $2x^2-4x+7$은 최소값 5를 가진다.

따라서 $x=1$일 때 $y_{최소}=\log_5\sqrt{2x^2-4x+7}=\frac{1}{2}$이다.

례 19. 1) $f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$일 때 $f(x)$를 구하여라.

2) $f\{f[f(x)]\}=27x+13$일 때 $f(x)$를 구하여라.

(풀이) 1) $f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}$

$=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-3\left(\frac{x-1}{x}\right)+3$

$\therefore\ f(x)=x^2-3x+3$

2) $f(x)=ax+b$ 라고 하자.

$f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+b(a+1)$

$f\{f[f(x)]\}=f[a^2x+b(a+1)]=a[a^2x+b(a+1)]+b$

$=a^3x+b(a^2+a+1)$

$f\{f[f(x)]\}=27x+13$ 이므로 결수비교법에 의하여

$\begin{cases} a^2=27 \\ b(a^2+a+1)=13 \end{cases}$ 즉 $a=3$, $x=1$

$\therefore\ f(x)=3x+1$

례 20. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $\log_x y=\log_y x$ 2) $y=\left|\log_2|x|\right|$

3) $y=|2^x-2|$ 4) $y=2^{|\log_2 x|}$

5) $y=x+\dfrac{1}{x}$ 6) $y=\dfrac{x(x+1)}{|x+1|}$

(풀이) 1) $\dfrac{1}{\log_y x}=\log_x y$, $(\log_y x)^2=1$,

$$\log_y x=\pm1$$

$\therefore\ \begin{cases} x=y\ \ (x>0,\ x\neq1) \\ x\cdot y=1 \end{cases}$

(그림 1-3을 참고)

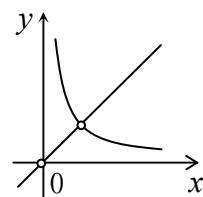



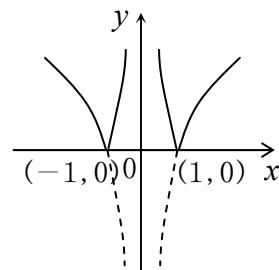
그림 1−3

2) 원함수를 $\log_2|x|\geq0$ 과 $\log_2|x|<0$ 으로 변형할수 있다.

$$y=\begin{cases} \log_2(-x) & (x\leq-1) \\ -\log_2(-x) & (-1<x<0) \\ -\log_2 x & (0<x<1) \\ \log_2 x & (x\geq1) \end{cases}$$

그림 1−4

(그림 1-4를 참고)

3) $y=|2^x-2|$

$$= \begin{cases} 2^x - 2 & (x \geq 1) \\ 2 - 2^x & (x < 1) \end{cases}$$

(그림 1-5를 참고)

그림 1－5

4) $y = 2^{|\log_2 x|} = \begin{cases} x & (x \geq 1) \\ \dfrac{1}{x} & (0 < x < 1) \end{cases}$

(그림 1-6을 참고)

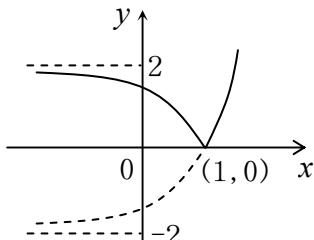



그림 1－6

5) $xy = x^2 + 1$

$x^2 - xy + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

따라서 $y \geq 2$ 또는 $y \leq -2$,

$y = \pm 2$ 일 때 $x = \pm 1$

곡선의 정점은 (1, 2), (－1, －2)이다.

그라프는 y 축과 직선 $y = x$ 사이에 놓인다.(그림 1-7을 참고)

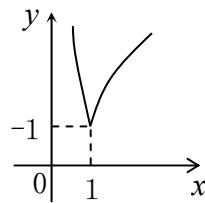
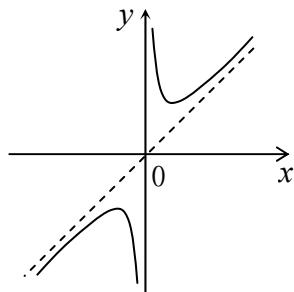
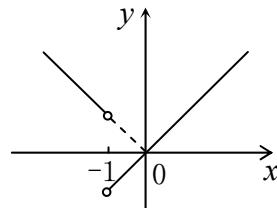



그림 1－7　　그림 1－8

6) $y = \dfrac{x(x+1)}{|x+1|}$

$$= \begin{cases} x & (x > -1) \\ -x & (x < -1) \end{cases}$$

(그림 1-8을 참고)

례 21. 다음 그라프의 함수의 식을 구하여라.

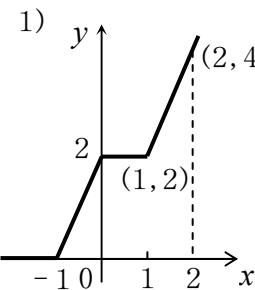
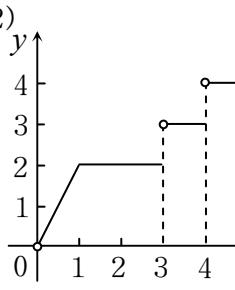
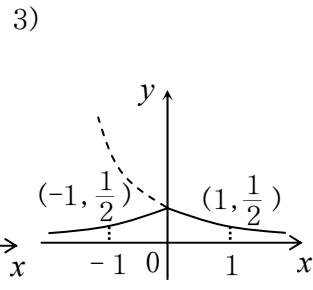



그림 1－9　　그림 1－10　　그림 1－11

(풀이) 1) $y=\begin{cases} 2x & (x\ge 1) \\ 2 & (0\le x\le 1) \\ 2x+2 & (-1\le x\le 0) \\ 0 & (x\le -1) \end{cases}$　　2) $y=\begin{cases} 2x & (0<x\le 1) \\ 2 & (1<x\le 3) \\ 3 & (3<x\le 4) \\ 4 & (x>4) \end{cases}$

3) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$

례 22. 다음 함수의 짝홀성을 밝혀라.

1) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}\ (x\in(-1,\ 1))$

2) $f(x)=x^n-x^{-n}$

3) $a>0$, $a\ne 1$, $g(x)$가 홀함수일 때

$$f(x)=(a-1)g(x)\left(\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{2}\right)$$

4) $f(x)$, $x\in\mathrm{R}$가 $af(x)-bf(-x)=cx+dx^3$을 만족시키고 a, b, c, d는 모두 0이 아니다. $|a|\ne|b|$일 때 $f(x)$의 식을 구하여라.

(풀이) 1) 홀함수

$x\in(-1,\ 1)$일 때

$$f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln(1-x)-\ln(1+x)$$

한편 $f(-x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$=-[\ln(1-x)-\ln(1+x)]=-f(x)$$

이므로 홀함수이다.

2) n이 짝수일 때 짝함수, n이 홀수일 때 홀함수

n이 짝수일 때 즉 $n=2k$

$$f(-x)=(-x)^{2k}-(-x)^{-2k}$$
$$=(x^2)^k-(x^2)^{-k}=x^{2k}-x^{-2k}=f(x)$$

따라서 $y=x^n-x^{-n}$은 짝함수

n이 홀수 즉 $n=2k+1$일 때

$$f(-x)=(-x)^{2k}\cdot(-x)-(-x)^{-2k}\cdot(-x)^{-1}$$
$$=x^{2k}(-x)+x^{-2k}\cdot x^{-1}-x^{2k+1}+x^{-(2k+1)}$$
$$=-(x^{2k+1}-x^{-(2k+1)})=-f(x)$$

$y=x^n-x^{-n}$은 홀함수

$n=0$일 때 $f(x)=0$, $f(x)$는 짝함수 또는 홀함수이다.

3) 짝함수

$g(-x)=-g(x)$이므로

$$f(-x)=(a-1)g(x)\left(\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=-(a-1)g(x)\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{x}}-1}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=-(a-1)g(x)\left(-1-\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=(a-1)g(x)\left(-\frac{1}{a^x-1}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=(a-1)g(x)\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=f(x)$$

따라서 $f(x)$는 짝함수이다.

4) 홀함수

$$af(x)-bf(-x)=cx+dx^3 \qquad ①$$

이므로

$$af(-x)-bf(x)=-(cx+dx^3) \qquad ②$$

①＋②하면

$$a[f(x)+f(-x)]-b[f(-x)+f(x)]=0$$

$|a|\neq|b|$ 이므로 $f(x)+f(-x)=0$

$$f(-x)=-f(x)$$

따라서 $f(x)$ 는 홀함수이다.

식 ①로부터 $af(x)+bf(x)=cx+dx^3$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{a+b}(cx+dx^3)$$

례 23. $f(x)=ax^3+x^2+bx-8$ 이고 $f(-2)=10$ 일 때 $f(2)$ 의 값을 구하여라.

(풀이) $g(x)=ax^3+bx$ 라고 하면 $g(x)$ 는 뜻구역 R에서 홀함수이고 $f(x)=g(x)+x^2-8$ 이다.

$$f(-2)=g(-2)+(-2)^2-8=10$$

$$g(-2)=14$$

$$g(2)=-14$$

$$\therefore\ f(2)=g(2)+2^2-8=-14-4=-18$$

$$f(2)=-18$$

례 24. $y=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}$ 일 때

1) $y=f(x)$ 가 뜻구역에서 증가함수라는것을 증명하여라.

2) $y=f(x)$ 가 거꿀함수를 가진다는것을 증명하고 그 거꿀함수를 구하여라.

(증명) 1) 함수 $f(x)$ 의 뜻구역은 R^+ 이고 함수의 값구역은 R이다.

$x_1>x_2>0$ 이라고 하면

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^{\frac{1}{2}}-x_1^{-\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}}+x_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\left(x_1^{\frac{1}{2}}-x_2^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{(x_1x_2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{1}{2}} > 0$, $1 + \dfrac{1}{(x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}} > 0$ 이므로

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

따라서 $y = f(x)$ 는 뜻구역에서 증가함수이다.

2) $f(x)$ 는 증가함수이므로

$x_1 \neq x_2$ (x_1, $x_2 \in \mathrm{R}^+$), $f(x_1) \neq f(x_2)$

따라서 거꿀함수를 가지므로 $y = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$ 로부터

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - x^{\frac{1}{2}} y - 1 = 0$$

$$x_{1,2}^{\frac{1}{2}} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$$

《＋》값만을 취하면 $x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$

거꿀함수를 구하면

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

즉 $y = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + x\sqrt{x^2 + 4}\right) + 1$ ($x \in \mathrm{R}$)

례 25. 제곱함수 $f(x) = x^{m^2 - 2m - 3}$ ($m \in \mathrm{Z}$)의 그라프가 y 축에 관하여 대칭이고 x 축, y 축과 사귀는 점은 없다.

1) 그라프를 보고 함수의 뜻구역, 값구역을 확정하고 함수의 짝홀성을 밝혀라.

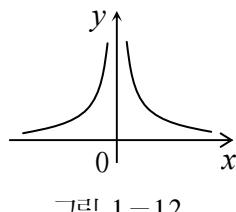
2) 함수의 식을 구하여라.

그림 1－12

(풀이) 1) 뜻구역 $\{x \mid x \neq 0,\ x \in \mathrm{R}\}$

값구역 $\{y \mid y > 0\}$

따라서 함수는 짝함수이다.

2) 함수가 1사분구에서는 감소하므로 $m^2 - 2m - 3 < 0$ 즉 $-1 < m < 3$, $m \in \mathrm{Z}$이므로 m 은 0, 1, 2뿐이다. 그런데 함수가 짝함수이므로 $m = 1$ 뿐이다.

$\therefore\ f(x)=x^{-4}$

례 26. 함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $x>1$)의 그라프가 세 점 A, B, C를 가진다. 그것들의 가로자리표는 m , $m+2$, $m+4$ 이다.

그림 1－13

1) △ABC의 면적을 S라고 하면 S$=f(m)$을 구하여라.

2) 함수 S$=f(m)$의 값구역을 구하여라.

3) 이 함수가 증가함수인가 감소함수인가를 판정하여라.

(풀이) 1) $S_{제형AA_1B_1B}+S_{제형BB_1C_1C}-S_{제형AA_1C_1C}=$

$$=\left[\log_a m+\log_a(m+2)\right]+\left[\log_a(m+2)+\log_a(m+4)\right]$$
$$-2\left[\log_a m+\log_a(m+4)\right]$$
$$=2\log_a(m+2)-\log_a m(m+4)$$
$$=\log_a\frac{(m+2)^2}{m(m+4)}=\log_a\left(1+\frac{4}{m^2+4m}\right)$$

2) $m>1$ 이므로 $m^2+4m>5$ 이다.

$$1<1+\frac{4}{m^2+4m}<\frac{9}{5}$$

S$=f(m)$의 값구역은 $\left(0,\ \log_a\frac{9}{5}\right)$ 이다.

3) $m>1$ 이므로 m^2+4m 은 증가한다.

따라서 $\dfrac{4}{m^2+4m}$ 은 감소한다.

$a>1$ 이므로 S$=f(m)$은 감소함수이다.

례 27. 그라프는 1개 함수의 그라프이고 그우에 A(－1, 2), B(0, 4), C(1, 3), D(2, －1)이 있다. 점 A의 왼쪽 곡선은 지수함수곡선의 일부분이고 곡선 AB는 다른 지수함수 $c\cdot a^x$ (c : 상수)의 그라프의 일부분이고 곡선 BCD는 1개 2차함수의 그라프의 한 부분이고 점 D의 오른쪽은 로그함수의 일

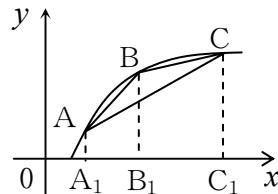
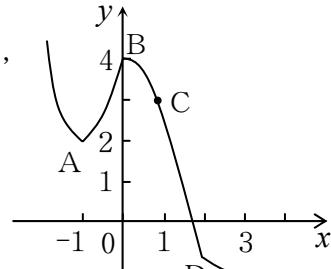



그림 1－14

부분이다. $f(x)$를 구하여라.

(풀이) 그라프로부터 함수 $f(x)$의 뜻구역은 각각 (－∞, －1], [－1, 0], [0, 2], [2, ＋∞)이다.

(－∞, －1]에서 $y_1 = a^x$로 하고 점 A의 자리표를 대입하면

$$a^{-1} = 2 \qquad \therefore\ a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

[－1, 0]에서 $y_2 = c \cdot a^x$로 하고 두 점 A, B의 자리표를 갈아넣으면 $c = 4$, $a = 2$

$$\therefore\ y_2 = 4(2^x) = 2^{x+2}$$

[0, 2]에서 $y_3 = ax^2 + bx + c$로 하고 세 점 B, C, D의 자리표를 갈아넣으면

$$a = -\frac{3}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 4$$

$$y_3 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$$

[2, ＋∞)에서 $y_4 = \log_a x$로 하고 점 D의 자리표를 갈아넣으면 $a = \frac{1}{2}$

$$\therefore\ y_4 = \log_{\frac{1}{2}} x$$

따라서 구하려는 식은

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & (x \in (-\infty,\ -1)) \\ 2^{x+2} & (x \in [-1,\ 0)) \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 & (x \in [0,\ 2]) \\ \log_{\frac{1}{2}} x & (x \in [2,\ +\infty)) \end{cases}$$

례 28. 1) $a^2 > b > a > 1$일 때 $\log_a b$, $\log_b a$, $\log_b \frac{a}{b}$, $\log_b \frac{b}{a}$

들을 작은것으로부터 큰 순서로 배렬하여라.

2) $\sqrt[n-1]{a^n}$, $\sqrt[n]{a^{n+1}}$ ($a>0$, $a \neq 1$, $n>1$)의 크기를 비교하여라.

(풀이) 1) $b>a>1$이므로 $\frac{b}{a}>1$, $\frac{a}{b}<1$

$b>1$이므로 $\log_b \frac{b}{a} > \log_b \frac{a}{b}$

$b>a>1$이므로 $\log_b b > \log_b a$, $0<\log_b a<1$

$$\frac{1}{\log_b a}>1$$

$$\log_a b - \log_b a = \frac{1}{\log_b a} - \log_b a > 0$$

$\therefore \log_a b > \log_b a$

$$\log_b a - \log_b \frac{b}{a} = \log_b \frac{a^2}{b} > 0$$

$\therefore \log_b \frac{a}{b} > \log_b \frac{b}{a}$

크기순서로 배렬하면

$$\log_b \frac{a}{b} < \log_b \frac{b}{a} < \log_b a$$

2) $\frac{\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n]{a^{n+1}}} = a^{\frac{1}{n(n-1)}}$, $\frac{1}{n(n-1)}>0$이므로

$0<a<1$일 때 $\sqrt[n-1]{a^n} < \sqrt[n]{a^{n+1}}$

$a>1$일 때 $\sqrt[n-1]{a^n} > \sqrt[n]{a^{n+1}}$

례 29. x가 어떤 값일 때 함수 $y=\frac{7}{9^x-2}-\frac{2}{3^x-1}$의 값이 부가 아니겠는가?

(풀이) $3^x=t$라고 놓으면 $9^x=t^2$

$$\therefore \frac{7}{t^2-2}-\frac{2}{t-1} \geq 0$$

$$\frac{(2t-1)(t-3)}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t-1)} \le 0$$

$t>0$ 이므로 웃식의 풀이는 $t \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right) \cup \left(\sqrt{2},\ 3\right]$

$\frac{1}{2} \le t < 1$ 일 때 $\frac{1}{2} \le 3^x < 1$

$$\therefore\ \log_3 \frac{1}{2} \le x < 0$$

$\sqrt{2} < t \le 3$ 일 때 $\sqrt{2} < 3^x \le 3$

$$\therefore\ \log\sqrt{2} < x \le 1$$

2) 련습문제

- 선택문제

1．다음의 매개 관계가운데서 정확한것은 (　)이다.

A．임의의 모임 M에 대하여 $\varnothing \subset \mathrm{M}$

B．$\mathrm{M}=\{1,\ \varnothing,\ \{2\}\}$ 에 대하여 $\{2\} \in \mathrm{M}$

C．$\mathrm{M} \cap \overline{\mathrm{M}} = \{\varnothing\}$　　D．$\{\varnothing\} = \{0\}$

2．다음의 매개 명제가운데서 서로 같은것은 (　)이다.

A．《$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$》와 《$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$》

B．《$m \in \mathrm{A}$》와 《$m \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$》

C．《$n \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$》와 《$m \in \mathrm{B}$》

D．《$p \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$》와 《$p \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$》

3．다음의 명제

1) $mx^2+3x-2=0$ 은 x 에 관한 한변수2차방정식이다.

2) 포물선 $y=kx^2-1$ 과 x 축은 적어도 한개 사귐점을 가진다.

3) 씨수가 아닌 홀수는 존재하지 않는다.

4) 서로 포함하는 두개 모임은 서로 같다.

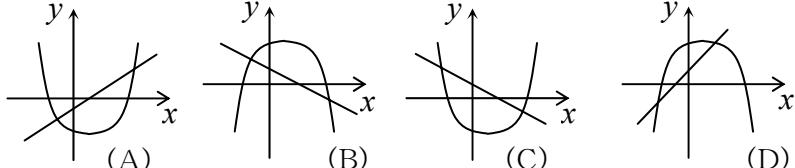
가운데서 옳은 명제의 개수는 (　)이다.

A．0개　　B．1개　　C．2개　　D．3개

4．다음 4개 명제가운데서 정확한것은 (　)이다.

A．제곱함수의 그라프는 모두 점 (1, 1)과 점 (0, 0)을 지난다.

B．제곱함수의 그라프는 4사분구에서 존재하지 않는다.

C．$y=x^n$ 에서 $n>0$ 일 때 함수값은 x 가 증가할 때 증가한다.

D. $y=x^n$ 에서 $n<0$ 일 때 1사분구에서 함수값은 x 가 증가할 때 증가한다.

5. 함수 $y=\log_{(2x-1)}\sqrt{x-2}$ 의 뜻구역은 ( )이다.

A. (1, +∞) B. (2, +∞) C. (1, 2] D. (1, 2)

6. $\log_2 3=p$, $\log_3 5=q$ 일 때 p, q 를 리용하여 $\lg 5$ 의 값을 표시하면 ( )이다.

A. p^2+q^2 B. $\frac{1}{5}(3p+2q)$ C. $\frac{pq}{1+pq}$ D. pq

7. 함수 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 의 거꿀함수는 ( )이다.

A. $y=\ln(x+\sqrt{x+1})$ B. $y=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$

C. $y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$ D. 존재하지 않는다.

8. 지수함수 $f(x)=(a^2-1)^x$ 에서 $x\in\mathrm{R}$ 일 때 감소함수이면 a 가 취할수 있는 값범위는 ( )이다.

A. $|a|>1$ B. $|a|<\sqrt{2}$ C. $a>\sqrt{2}$ D. $1<|a|<\sqrt{2}$

9. 주어진 a, b, c 에 대하여 방정식 $ax^2+bx+c=0$ 과 함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프는 그림의 ( )과 같다.

그림 1－15

－ 빈칸채우기문제

10. 어떤 명제의 거꿀명제가 《 a, b, $c\in\mathrm{N}$, a, b 가운데 적어도 한개가 c 의 배수이라면 $a\cdot b$ 는 반드시 c 의 배수이다.》라고 하면 이 명제의 안명제는 ____이고 기본명제는 ____명제(참 또는 거짓)이며 안명제는 ____명제(참 또는 거짓)이다.

11. 함수 $y=\frac{1}{3}x+m$ 과 $y=nx-6$ 이 서로 거꿀함수이면 $m=$____, $n=$____이다.

12. $0<a<1,\ a>b>0$ 일 때 $\log_a \frac{1}{b},\ \log_a b,\ \log_b \frac{1}{b}$ 의 크기순서는 ____이다.

13. 함수 A. $y=x^2$ B. $y=x^{-2}$ C. $y=\sqrt[3]{x}$ D. $y=\frac{x}{3}$ 에 대하여 다음 조건을 만족하는 함수를 모두 표시하여라.

$f(x)=-f(x)$ 를 만족하는 함수는 ____

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 를 만족하는 함수는 ____

$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ 를 만족하는 함수는 ____

$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$ 를 만족하는 함수는 ____

14. 함수 $y=-\sqrt{x-1}$ 의 거꿀함수는 ____

15. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>0) \\ e & (x=0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$ 일 때 $f\{f[f(-2)]\}=$____

16. 함수 $y=\log_a \frac{1-x^2}{(1+x^2)}$ 은 (−1, 1)에서 ____함수(홀 또는 짝)이다.

17. 함수 $y=a^{x^2-4x+7}$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 의 증가구간은 ____이고 감소구간은 ____이다.

– 해답문제

18. A= $\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$, B= $\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$, C= $\{x|x^2+2x-8=0\}$이고 A∩B⊃∅, A∩C=∅일 때 a 의 값을 구하여라.

19. A⊂B이면 $\overline{B}\subset\overline{A}$ 이고 그 거꿀도 성립한다는것을 증명하여라.

20. 실수 x, y 에 대하여 $x^2\neq y^2$ 이면 $x\neq y$ 라는것을 증명하여라.

21. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{|x|}$ 2) $y=(1+x)(1-|x|)$ 3) $y=|x^2-1|+2x$

4) $y=\log_2\sqrt{x+1}$

22. 함수 $y=\frac{x+4}{x^2-x-2}$ 의 값을 구하여라.

23. $f(ab)=f(a)+f(b)$ 이면 다음것을 구하여라.

1) $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$ 2) $f(a^n)=nf(a)$

24. 함수 $y=x+\sqrt{1+x^2}$ 의 거꿀함수를 구하여라.

25. 함수 $y=\sqrt{-x}+\frac{1}{x+4}+\lg(x^2-x-6)$ 의 뜻구역을 구하여라.

26. $a,\ b\in\mathrm{R}^+$ 일 때 $a^a b^b > a^b b^a$ 임을 증명하여라.

3) 자체시험문제

- 선택문제

1. 함수 $f(x)=\lg(x^2-9)$ 의 뜻구역은 M, $g(x)=\lg(x+3)$ 의 뜻구역은 N이다. 모임 M과 N의 관계는 ( )이다.

A. $M\cap N=\varnothing$ B. $N\subset M$ C. $M=N$ D. $M\subset N$

2. 함수 $y=\sqrt{-x^2+2x+3}$ 은 ( )이다.

A. 최대값을 가진다. B. 최소값을 가진다.
C. 최대값을 가지고 최소값은 없다.
D. 최대값과 최소값도 가진다.

3. 함수 $y=x^{\frac{n}{m}}$ (m은 0 아닌 짝수, n은 홀수이고 $mn<0$)이면 그의 대응하는 그라프는 ( )이다.

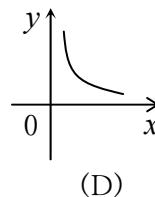
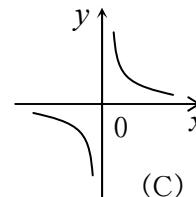
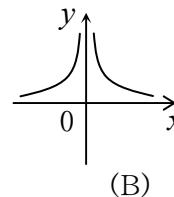
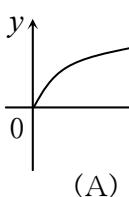



그림 1－16

4. 3개의 수 $\log_3 2, \log_5 4$, $2^{0.3}$이 주어졌다. 그것들의 크기관계는 ( )이다.

A. $\log_3 2<\log_5 4<2^{0.3}$ B. $2^{0.3}<\log_3 2<\log_5 4$
C. $\log_5 4<\log_3 2<2^{0.3}$ D. $\log_3 2<2^{0.3}<\log_5 4$

5. $f(x)=ax^3+bx-cx^{\frac{1}{3}}$ 에서 $a,\ b,\ c$ 는 상수이다. 이때 $f(-2)=2$ 이고 $f(2)$는 ( )이다.

A. －2　　B. －6　　C. －4　　D. －10

6. 2차방정식 $y=ax^2+bx+c$ 의 그라프는 다음과 같다.(그림 1-17)

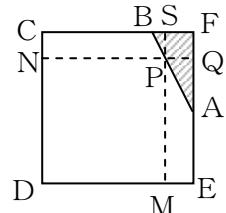
그림 1－17

식 a, b, c, $a+b+2c$, $a-b+c$, b^2-4ac, $2a+b$, $2a-b$ 들가운데서 정수인것은 ( )이다.

A. 2개　　B. 3개　　C. 4개　　D. 5개

－ 빈칸채우기문제

7. 기본명제의 안명제가《만일 $x^2-x-6>0$ 이면 $x>3$ 또는 $x<-2$ 이다.》라고 하면 그의 거꿀명제는 ____이고 그의 거꿀안명제는 ____이다.(참 또는 거짓)

8. 함수 $y=f(x)=\dfrac{ax+3}{x-1}$ 이고 (3, 7)은 $y=f^{-1}(x)$의 그라프의 점이다. $y=f(x)$의 값구역은 ____이다.

9. 함수 $y=\dfrac{3^x}{3^x+1}$ 의 거꿀함수는 ___이고 거꿀함수의 뜻구역은 ___이다.

10. 함수 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-4x-5}$ 의 증가구간은 ___이고 감소구간은 ___이다.

－ 해답문제

11. $f(x)$ 는 짝함수, $g(x)$ 는 홀함수이고 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 이라고 하면 $f(x)$와 $g(x)$의 식을 구하여라.

12. 바른4각형 CDEF의 변의 길이는 4이고 한 모서리 AFB를 잘라내여 5각형 ABCDE를 얻었다. AF＝2, BF＝1이고 AB에서 한 점 P를 취하고 P를 지나며 CD, DE에 평행선을 그어 직4각형 PNDM을 얻었다. 이 직4각형의 면적의 최대값을 구하여라.

그림 1－18

13. $f(x)=9^x\ (x\in \mathrm{R})$일 때 $f^{-1}(3^x+6)$ 을 구하여라.

14. 방정식 $(\log_{(y+1)}x)^{-1}-(\log_2 x)^{-1}=2$ 에 맞는 함수식 $y=f(x)$ 를 구하고 그라프를 그려라.

2. 식과 방정식

1) 문제풀이방법

례 1. $xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1$을 인수분해하여라.

(풀이) $x=1$이면 식의 값이 0이므로 인수 $x-1$을 가진다. 주어진 식이 대칭여러마디식이므로 $y-1,\ z-1$도 인수를 가진다.

따라서 주어진 식은 $(x-1)(y-1)(z-1)$을 인수로 가진다.

적이 3차이므로 적의 나머지 인수는 $x,\ y,\ z$를 포함하지 않는다.

∴ $xyz-xy-yz-xz+x+y+z-1=\mathrm{L}(x-1)(y-1)(z-1)$

량변의 결수를 비교하면 L=1

∴ 주어진 식$=(x-1)(y-1)(z-1)$

례 2. $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$을 인수분해하여라.

(풀이) 주어진 식$=x^2+2xy+y^2-3(x+y)-40$

$$(x+y)^2-3(x+y)-40=(x+y-8)(x+y+5)$$

례 3. $12x^5-44x^4+33x^3+33x^2-44x+12$

(풀이) 주어진 식$=12x^5+12-44x^4-44x+33x^3+33x^2$

$$=12(x^5+1)-44x(x^3+1)+33x^2(x+1)$$

$$=(x+1)[12x^4-12x^3+12x^2-12x+12$$

$$-44x(x^2-x+1)+33x^2]$$

$$=(x+1)[12x^4+12-(56x^3+56x)+89x^2]$$

$$=(x+1)\left[12x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-56x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)+89x^2\right]$$

$x+\frac{1}{x}=y$로 놓으면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$$

∴ 주어진 식$=(x+1)x^2[12(y^2-2)-56y+89]$

$$=(x+1)x^2(12y^2-56y+65)$$

$$=(x+1)x^2(2y-5)(6y-13)$$

$$= (x+1)x^2\left[2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right]\left[6\left(x+\frac{1}{x}\right)-13\right]$$
$$= (x+1)(2x^2-5x+2)(6x^2-13x+6)$$
$$= (x+1)(2x-1)(x-2)(3x-2)(2x-3)$$

례 4. x^2-1로 나누면 나머지가 $5x-8$이고 x^2-x-6으로 나누면 나머지가 $17x+4$인 3차식을 구하여라.

(풀이) 구하려는 3차식을 $f(x)$라고 하면

$$f(x)=(x^2-1)(ax+b)+(5x-8)$$

여기서 $ax+b$는 $f(x)$를 x^2-1로 나눌 때의 상이다.

$\therefore\ f(x)=ax^3+bx^2+(5-a)x-b-8$

한편 $f(x)-(17x+4)$는 $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$로 완제된다.

$f(x)-(17x+4)=ax^3+bx^2-(a+12)x-(b+12)$이므로

$$\begin{cases}27a+9b-3a-3b-b-12=0\\-8a+4b+2a+24-b-12=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}3a+b=6\\2a-b=4\end{cases}$$

$\therefore\ a=2,\ b=0$

$$f(x)=(x^2-1)2x+(5x-8)=2x^3+3x-8$$

례 5. $\frac{1}{2}|a-b+4|+\sqrt{2a-3b+7}+c^2+c+\frac{1}{4}=0$일 때 $\sqrt{\frac{b-a}{c^3}}$의 값은 얼마인가?

(풀이) 주어진 식$=\frac{1}{2}|a-b+4|+\sqrt{2a-3b+7}+\left(c+\frac{1}{2}\right)^2=0$이므로

$$\begin{cases}a-b+4=0\\2a-3b+7=0\\c+\frac{1}{2}=0\end{cases}$$

이여야 한다.

이 식을 풀면 $a=-5$, $b=-1$, $c=-\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{b-a}{c^3}}=\sqrt{-\frac{-1-(-5)}{-\frac{1}{8}}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

례 6. 다음 식을 계산하여라.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)\div\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{a+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)$$

(풀이) 주어진 식＝

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)\div\left(\frac{a-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{a+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+1}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)\div\left(\frac{\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a^2}-1)}{\sqrt[3]{a}-1}-\frac{\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}+1)}{\sqrt[3]{a}+1}\right)$$

$$=\left(\sqrt[4]{ab}+\frac{1-\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)\div\left[\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{a}+1)-\sqrt[3]{a^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{ab}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=\frac{1}{\sqrt[12]{a^7b^3}}$$

례 7. 다음 식을 계산하여라.

$$|x+2|-|x-1|+2|x-4|=10$$

(풀이) 1) $x<-2$ 일 때

$$-x-2+x-1-2x+8=10$$
$$-2x+5=10$$
$$x=-\frac{5}{2}$$

2) $-2\le x<1$ 일 때

$$x+2+x-1-2x+8=10$$
$$0\cdot x=1$$

3) $1\le x<4$ 일 때

$$x+2-x+1-2x+8=10$$
$$-2x=-1$$

$x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\notin[1,\ 4)$ 이므로 버린다.

4) $x\ge4$ 일 때

$x+2-x+1+2x-8=10$

$2x=15$

$x=\frac{15}{2}$

따라서 풀이는 $\left\{-\frac{15}{2},\ \frac{15}{2}\right\}$

례 8. x_1, x_2 가 방정식 $x^2-2m^2x+3=0$ 의 두개의 실수풀이이고 y_1, y_2 가 방정식 $y^2-5my+3n=0$ 의 두개의 실수풀이이면 $2x_1-y_1=3,\ 2x_2-y_2=3$ 이다. $m,\ n$ 의 값을 구하여라.

(풀이) $2(x_1+x_2)-(y_1+y_2)=6$

이제 $4m^2-5m-6=0$

$(m-2)(4m+3)=0$

$\therefore\ m=2,\ \ m=-\frac{3}{4}$

한편 $a^2-2m^2x+3=0$ 에서

$\mathrm{D}=m^4-3>0$

$m=-\frac{3}{4}$ 일 때 $\mathrm{D}<0$ 이므로 $m\ne-\frac{3}{4}$

$\therefore\ m=2$

$2(x_1-x_2)-(y_1-y_2)=0$

$2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}-\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=0$

$2\sqrt{4m^4-12}-\sqrt{25m^2-12n}=0$

$25m^2-12n=16m^4-48$

$100-12n=256-48$

$n=-9$

례 9. x에 관한 다음 방정식을 풀어라.

1) $2^{\sqrt{x+1}} = 16\sqrt{(0.25)^{5-\frac{x}{4}}}$

2) $\log_x \frac{4-x}{10} = (\lg\lg t - 1)\cdot \log_x 10 \quad (t>0)$

(풀이) 1) $2^{\sqrt{x+1}} = 2^4 \cdot (2^{-2})^{\frac{20-x}{8}}$

$$2^{\sqrt{x+1}} = 2^4 \cdot 2^{-5+\frac{x}{4}}$$

$$\sqrt{x+1} = -1+\frac{x}{4}$$

$$\therefore\ x_1 = 0,\ x_2 = 24$$

$x_1 = 0$은 끼여든 풀이이므로 방정식의 풀이는 $x = 24$

2) $\log_x \frac{(4-x)x}{10} = \log_x 10^{(\lg\lg t-1)}$

$$\frac{(4-x)x}{10} = 10^{(\lg\lg t-1)}$$

$$\frac{4x-x^2}{10} = 10^{-1}\lg t$$

$$4x - x^2 = \lg t$$

$\therefore\ x^2 - 4x + \lg t = 0$

$$\mathrm{D} = 16 - 4\lg t \geq 0$$

따라서 $\lg t \leq 4$ 또한 $\lg t > 0$이므로 $1 < t \leq 10^4$

$\therefore\ x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-\lg t}$

그런데 $x>0,\ 4-x>0,\ x\neq 1$

$\therefore\ 0<x<4,\ x\neq 1$

그리고 $2-\sqrt{4-\lg t} = 1$일 때 t의 값은 $t = 10^3$이다.

따라서 $0 < t \leq 1$일 때 방정식은 풀이가 없다.

$0 < t < 10^3$일 때 방정식의 풀이

$$x = 2 \pm \sqrt{4-\lg t}$$

$10^3 < t \leq 10^4$일 때 방정식의 풀이 $x = 2 \pm \sqrt{4-\lg t}$

례 10. 다음 련립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} 3\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}-6=0 \\ \lg(3x-y)+\lg(y+x)=4\lg 2 \end{cases}$$

(풀이) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2x-y}{2}}=k$ 라고 놓으면 $k>0$ 이다.

$$3k^2+7k-6=0$$

$\therefore\ (k+3)(3k-2)=0$

$k=-3$ 은 $k>0$ 이므로 버린다.

$\therefore\ k=\frac{2}{3}$

따라서 $2x-y=2$ 로부터 $y=2x-2$

$$\lg(x+2)+\lg(3x-2)=4\lg 2$$

$$(x+2)(3x-2)=16$$

$$3x^2+4x-20=0$$

$$(3x+10)(x-2)=0$$

$x=-\frac{10}{3}$ 은 뜻구역에 맞지 않으므로 버린다.

따라서 풀이모임은 $\{(2,\ 2)\}$ 이다.

례 11. 방정식 $x^2-x-1=0$ 의 두 풀이가 $\alpha,\ \beta$ 이다. 이때 $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha,\ f(-1)=1$ 인 2차함수 $f(x)$ 를 구하여라.

(풀이) $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=1,\ \alpha\beta=-1,\ \alpha\neq\beta$ 이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면

$f(\alpha)=\beta$ 이므로

$$a\alpha^2+b\alpha+c=\beta \qquad ①$$

$f(\beta)=\alpha$ 이므로

$$\alpha\beta^2+b\beta+c=\alpha \qquad ②$$

$f(1)=1$ 이므로

$$a+b+c=1 \qquad ③$$

①＋②

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3$을 리용하면

$$3a+b+2c=1 \qquad ④$$

①－②하고 량변의 $\alpha-\beta$를 없애면

$$a+b=-1 \qquad ⑤$$

식 ③, ④, ⑤로부터 $a=-1,\ b=0,\ c=2$

$\therefore\ f(x)=-x^2+2$

례 12. 다음 련립안같기식을 풀어라.

$$\begin{cases} ax-6y=5a-3 & ① \\ 2x+(a-7)y=29-7a & ② \end{cases}$$

(풀이) ①×2하면

$$2ax-12y=10a-6$$

②× a 하면

$$2ax+a(a-7)y=29a-7a^2$$

$$\left(a^2-7a+12\right)y=-\left(7a^2-19a-6\right)$$

$$(a-3)(a-4)y=-(7a+2)(a-3)$$

1) $(a-3)(a-4)\neq 0$ 즉 $a\neq 3,\ a\neq 4$일 때

$$y=-\frac{7a+2}{a-4}$$

이것을 식 ②에 갈아넣으면

$$2x+(a-7)\cdot\frac{(-7a-2)}{a-4}=29-7a$$

$$x=\frac{5(a-13)}{a-4}$$

2) $a=3$일 때

$$\begin{cases} 3x-6y=12 \\ 2x-4y=8 \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}=\frac{-6}{-4}=\frac{12}{8}$$

3) $a=4$일 때

$$\begin{cases} 3x-6y=17 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$$

$\therefore \ \frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} \neq \frac{17}{1}$

따라서 풀이모임은

$a \neq 3, \ a \neq 4$일 때 $\{(\frac{5(a-13)}{a-4}, -\frac{7a+2}{a-4})\}$

$a = 3, \ a \neq 4$일 때 $\{(x, \ y) | x - 2y - 4 = 0\}$

$a \neq 3, \ a = 4$일 때 $\varnothing$

2) 련습문제

1. $x^3 + 6 + \frac{1}{x^3} = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ 일 때 $x + \frac{1}{x}$의 값을 구하여라.
2. $x-a$로 나누면 나머지가 a^3, $x-b$로 나누면 나머지가 b^3, $x-c$로 나누면 나머지가 c^3인 x의 여러마디식가운데서 차수가 가장 낮은 여러마디식을 구하여라. 여기서 a, b, c는 서로 다른 상수이다.
3. 방정식을 풀어라.

   1) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$ 　　2) $\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

   3) $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$

   4) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5} - \sqrt{4x-3} = 0$

   5) $\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2}\left(\frac{a^2-4}{2a-x}\right) = 1$

   6) $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{(1-\sin^2 x)} = 6$

   7) $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$
4. 2차방정식 $x^2 + (2k+6)x + 12 = 0$의 두 풀이가 모두 -1보다 큰 실수로 되는 k의 범위를 구하여라.
5. 련립방정식 $\begin{cases} -ax = 6y - 3 \\ 2x - a = (4+a)y \end{cases}$ 를 풀어라.

   그리고 방정식의 한쌍의 풀이 $x, \ y$가 함께 부로 되자면 a가 어떤 범위의 실수값으로 되여야 하는가?
6. 세 형제의 나이를 물었다. 첫째에게 물으니 나의 나이는 셋째가 앞으로 16살 될 때 둘째의 나이와 같다고 한다. 둘째에게 물으니 나

의 나이는 셋째가 8살 될 때 첫째의 나이와 같다고 하였다. 셋째에게 형들의 나이를 물으니 자기가 태여날 때 그들의 나이의 합이 10살이였다고 하였다. 세 형제의 나이를 구하여라.

7. 11개의 부 아닌 수가 있는데 이 수들가운데서 어느것을 취해도 나머지 10개의 수들의 합의 2제곱과 같다. 이때 11개의 수들을 구하여라.

8. 체적이 20L인 그릇에 알콜이 있는데 여기서 얼마를 퍼내고 그대신 물을 넣었다. 이런 조작을 한번 더 한 결과 그릇에 순 알콜이 5L 남았다면 매번 몇L씩 퍼냈는가?

9. 3대의 양수기 A, B, C로 어떤 늪의 물을 퍼내는데 A, C 각각 한대로 물을 퍼낼 때의 시간의 합은 B로 퍼낼 때의 시간의 2배이다. B, C로 함께 퍼낼 때의 시간과 A, B로 함께 퍼낼 때의 시간의 비는 10 : 7이다. 이 양수기들의 물빼는 능력의 비를 구하여라.

10. 어떤 농도의 용액 100L가 있다. 이로부터 10L를 퍼내고 같은 량의 물을 넣었다. 이와 같은 방법을 되풀이할 때 몇번째만에 용액의 농도가 처음의 $\frac{1}{5}$이하로 되겠는가?

11. 900km 떨어진 두 지점 A, B가 있다. 첫 직승기가 B를 향하여 떠난 다음 3시간후에 둘째 직승기가 A를 향하여 B를 떠났다. 두 직승기가 도중에서 만난 때로부터 첫 직승기는 2.5시간, 둘째 직승기는 4시간후에 각각 목적지에 도착하였다. 두 직승기의 속도를 구하여라.

3) 자체시험문제

1. 다음 명제들가운데서 옳은것은 ( )이다.
   A. 반대수가 그 자신과 같은 실수는 0뿐이다.
   B. 거꿀수가 그 자신과 같은 실수는 1뿐이다.
   C. 절대값이 그 자신과 같은 실수는 0뿐이다.
   D. 정의 2차풀이가 그 자신과 같은 실수는 1뿐이다.

2. m, n 이 옹근수이면 $x^2+10mx+5n+3=0$ 과 $x^2+10mx+5n-3=0$ 은 반드시 ( )이다.
   A. 적어도 한개의 방정식이 옹근수풀이를 가진다.
   B. 모두 옹근수풀이를 가지지 않는다.
   C. 한개의 방정식만 옹근수풀이를 가진다.
   D. 모두 옹근수풀이를 가진다.

3. $5+\sqrt{7}$ 의 소수부가 a, $5-\sqrt{7}$ 의 소수부가 b 이면 $ab+5b=$____

4. 포물선 $y=ax^2+bx+c$ 의 정점이 $C\left(\frac{7}{4},\ -\frac{25}{8}\right)$ 이고 포물선이 점 $\left(\frac{3}{4},\ -\frac{9}{8}\right)$ 를 지나고 x 축과 두 점 A, B에서 사귄다. 점 A는 점 B의 왼쪽에 있으며 포물선의 대칭축과 x 축은 점 D에서 사귄다. y 축의 정의 반축우에 한 점 N이 있고 △AON과 △CAD가 서로 닮았다고 할 때 점 N의 자리표를 구하여라.

5. 다음 방정식을 풀어라.

1) $|x-1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$

2) $(2a+b)(x+a)+(a+2b)(x+b)=2$ ($a,\ b$ 는 실수)

3) $\begin{cases} x+y+z=10 \\ xy+yz+zx=31 \\ xyz=30 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{13}{6} \\ x^2+y^2=97 \end{cases}$

5) $\frac{z}{x+y+1}=\frac{x}{y+z+1}=\frac{y}{z+x}=x+y+z$

6) $\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y+\log_2(y+1)=1+\log_2 3 \\ 2^{y^2}+2^x 16^y=0 \end{cases}$

7) $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$

6. 인수분해하여라.

1) $x^{10}+x^5+1$ 2) $x^2-3x+2xy+y^2-3y+40$

3) $(x^2+5x+6)(x^2+7x+6)-3x^2$

7. $x=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2},\ y=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ 일 때 x^2+xy+y^2 및 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$ 의 값을 구하여라.

8. $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$ 일 때 $(a+b+c)^3=27abc$ 임을 증명하여라.

3. 삼각식과 삼각함수

1) 문제풀이방법

례 1. $P=\left\{\cos\frac{k\pi}{3}\,(k\in Z)\right\}$, $Q=\left\{\sin\frac{2n-3}{6}\pi\,(n\in Z)\right\}$ 일 때 P와 Q의 관계를 말하여라.

(풀이) $k=6n\,(n\in Z)$, $\cos\frac{k\pi}{3}=\cos 2n\pi=1$

$k=6n+1\,(n\in Z)$, $\cos\frac{k\pi}{3}=\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$k=6n+2\,(n\in Z)$, $\cos\frac{k\pi}{3}=\cos\left(2n\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$k=6n+3\,(n\in Z)$, $\cos\frac{k\pi}{3}=\cos(2n\pi+\pi)=-1$

$k=6n+4\,(n\in Z)$, $\cos\frac{k\pi}{3}=\cos\left(2n\pi+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$k=6n+5\,(n\in Z)$, $\cos\frac{k\pi}{3}=\cos\left(2n\pi+\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$P=\{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\}$, $Q=\{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\}$

$\therefore\ P=Q$

례 2. $\tan\alpha=2$ 일 때 다음 식의 값을 구하여라.

1) $\sin\alpha\cos\alpha$　　2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

3) $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha$

(풀이) 1) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$

$\therefore\ \sin\alpha=2\cos\alpha$

$$\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha=\frac{2}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2}{5}$$

2) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{9}{5}$

3) $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha=$

$$=\left(2\tan^2\alpha-3\tan\alpha-5\right)\cdot\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{3}{5}$$

례 3. 간단히 하여라.

1) $$\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}}-\sqrt{\frac{1-\sin(\pi+\alpha)}{1+\sin(\pi-\alpha)}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos(\pi+\alpha)}}-\sqrt{\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{1+\cos(2\pi-\alpha)}}\right)$$

2) $$\cos\left(\frac{4n+1}{4}\pi+\alpha\right)+\cos\left(\frac{4n-1}{4}\pi-\alpha\right)\ (n\in Z)$$

(풀이) 1) 주어진 식＝

$$=\left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=\frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\begin{cases}4 & (\alpha\text{가 1, 3사분구의 각일 때})\\ -4 & (\alpha\text{가 2, 4사분구의 각일 때})\end{cases}$$

2) 주어진 식$=\cos\left[n\pi+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]+\cos\left[n\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]$

n이 짝수 즉 $n=2m$ (m은 옹근수)이면

주어진 식＝

$$=\cos\left[2m\pi+\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]+\cos\left[2m\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

n이 홀수 즉 $n=2m+1$ (m은 옹근수)이면

주어진 식＝

$$= \cos\left[2m\pi + \pi + \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right] + \cos\left[2m\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right]$$

$$= -2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$\therefore \text{ 주어진 식} = \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) & (n\text{이 짝수}) \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) & (n\text{이 홀수}) \end{cases}$$

례 4. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1） $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{25 - x^2}$

2） $y = \lg(\tan x + 1) + \sqrt{4\sin^2 x - 3}$

（풀이） 1） $\begin{cases} \sin x \ge 0 \\ 25 - x^2 \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2k\pi \le x \le (2k+1)\pi \quad *) \\ -5 \le x \le 5 \end{cases}$$

즉 $k = -1$일 때 ＊)은 $x \in [-2\pi, -\pi]$

$k = 0$일 때 ＊)은 $x \in [0, \pi]$

$k = 1$일 때 ＊)은 $x \in [2\pi, 3\pi]$

-2π -5 $-\pi$ 0 π 5 2π 3π

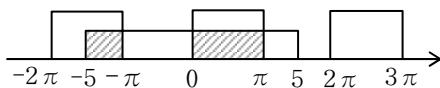



그림 3－1

따라서 뜻구역은 $[-5, -\pi] \cup [0, \pi]$이다.

2） $\begin{cases} x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z) \\ \tan x + 1 > 0 \\ 4\sin^2 x - 3 \ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathrm{Z}) \\ \tan x > -1 \\ \sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \sin x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

따라서 함수의 뜻구역은

$$\left(2k\pi + \frac{\pi}{3},\ 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2k\pi + \frac{4\pi}{3},\ 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) \ (k \in Z)$$

례 5. 다음 함수의 뜻구역을 구하여라.

1) $y = \dfrac{2\sin x + 1}{\sin x - 3}$ 　　2) $y = 1 + 3\cos^2 x + 4\sin x$

3) $y = \dfrac{\tan^2 x + \tan x - 1}{\tan^2 x + \tan x + 1}$

(풀이) 1) $\sin x \cdot y - 3y = 2\sin x + 1$

$\therefore\ \sin x = \dfrac{1+3y}{y-2}$

$|\sin x| \leq 1$ 이므로 $\left|\dfrac{1+3y}{y-2}\right| \leq 1$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2} \leq y < 2$

따라서 함수의 뜻구역은 $[-\dfrac{3}{2},\ 2)$ 이다.

2) $y = 1 + 3(1 - \sin^2 x) + 4\sin x = -3\left(\sin x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{16}{3}$

$\sin x = \dfrac{2}{3}$ 일 때 $y = \dfrac{16}{3}$, $\sin x = -1$ 일 때 $y = -3$

따라서 함수의 뜻구역은 $\left[-3,\ \dfrac{16}{3}\right]$ 이다.

3) $\tan x = t \ (t \in \mathrm{R})$ 라고 하면

$$y = \frac{t^2 + t - 1}{t^2 + t + 1}$$

$$(y-1)t^2+(y-1)t+(y+1)=0$$

$y\neq 1$일 때

$$D=(y-1)^2-4(y-1)(y+1)\geq 0$$

$\therefore\ 3y^2+2y-5\leq 0$

$$-\frac{5}{3}\leq y<1$$

$y=1$ 일 때 $(y-1)t^2+(y-1)t+(y+1)=0$ 은 풀이를 가진다.

따라서 함수의 뜻구역은 $\left[-\frac{5}{3},\ 1\right)$이다.

례 6. 다음 함수의 주기를 구하여라.

1) $y=\sin\left(\sqrt{3}\pi x-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$

2) $y=\sin\frac{x}{5}+\cot\frac{2x}{7}$

(풀이) 1) $y=\sin\left[\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi x+\frac{\pi}{3}\right]$

$$T=\frac{2\pi}{\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi}=\frac{4}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{2}{5}\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

2) $\sin\frac{x}{5}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{5}}=10\pi$, $\cot\frac{2}{7}x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{2}{7}}=\frac{7}{2}\pi$

따라서 10π 와 $\frac{7}{2}\pi$ 의 최소공통배수는 70π 이다.

$\therefore\ T=70\pi$

례 7. $f_1(x)$ 의 주기는 $T_1=p\alpha$, $f_2(x)$ 의 주기는 $T_2=q\alpha$ 이다.($p,\ q$ 는 자연수이고 $(p,\ q)=1$, α 는 정의 실수)

1) $pq\alpha$ 는 함수 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 의 주기라는것을 증명하여라.

2) 1)을 리용하여 $f(x)=\sin 3x+\cos 5x$의 주기를 구하여라.

(풀이) 1) $f(x+pq\alpha)=f_1(x+pq\alpha)+f_2(x+pq\alpha)$

$$=f_1(x+q\mathrm{T}_1)+f_2(x+q\mathrm{T}_2)$$
$$=f_1(x)+f_2(x)$$

따라서 $pq\alpha$는 함수 $y=f(x)$의 주기이다.

2) $\mathrm{T}_1=\frac{2\pi}{3}=5\cdot\frac{2\pi}{15}$, $\mathrm{T}_2=\frac{2\pi}{5}=3\cdot\frac{2\pi}{15}$

$$(3,\ 5)=1$$

따라서 $f(x)$의 주기는 $5\cdot 3\cdot\frac{2\pi}{15}=2\pi$이다.

례 8. $\log_{\cos\alpha}\cot\alpha<\log_{\sin\alpha}\tan\alpha$일 때 α의 값범위를 구하여라.

(풀이) 안갈기식이 성립하자면

$$\begin{cases} 0<\cos\alpha<1 \\ 0<\sin\alpha<1 \\ \tan\alpha>0 \\ \cot\alpha>0 \\ \log_{\cos\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}<\log_{\sin\alpha}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in \mathrm{Z}) \\ 1-\log_{\cos\alpha}\sin\alpha<1-\log_{\sin\alpha}\cos\alpha \end{cases}$$

$0<\cos\alpha<1,\ 0<\sin\alpha<1$이므로 로그함수의 성질로부터

$$\log_{\cos\alpha}\sin\alpha>0$$

따라서 웃식은

$$\begin{cases} 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \log_{\cos\alpha}\sin\alpha>\frac{1}{\log_{\cos\alpha}\sin\alpha} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \log_{\cos\alpha}\sin\alpha>1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \sin\alpha < \cos\alpha \end{cases}$$

$$\therefore \ 2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{4} \ (k \in \mathrm{Z})$$

례 9. $\sin\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)$ 의 크기관계를 비교하여라.

(풀이) $\frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ ①

시누스함수는 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} < \sin\frac{3\pi}{8} < \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$\frac{\pi}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\pi}{3} > 1$이므로 $\frac{\pi}{4} < \sin\frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{3}$

$\therefore \ \sin\frac{\pi}{4} < \sin\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right) < \sin\frac{\pi}{3}$ ②

코시누스함수는 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 감소하므로

$$\cos\frac{\pi}{4} > \cos\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right) > \cos\frac{\pi}{3}$$

$\sin\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} > \cos\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right) > \frac{1}{2}$ ③

식 ①로부터

$$\cos\frac{\pi}{3} > \cos\frac{3\pi}{8} > \cos\frac{\pi}{2} \quad 즉 \quad \frac{1}{2} > \cos\frac{3\pi}{8} > 0$$

$\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2}$이므로 $\frac{\pi}{6} > \frac{1}{2} > \cos\frac{3\pi}{8} > 0$ ④

식 ③으로부터

$$\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} > \sin\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right) > \sin 0 = 0 \qquad ⑤$$

식 ③으로부터

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} < \cos\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right) < \cos 0 = 1 \qquad ⑥$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{2}$ 이므로 식 ②, ③, ⑤, ⑥으로부터

$$\cos\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2} > \sin\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$> \cos\left(\sin\frac{3\pi}{8}\right) > \frac{1}{2} > \sin\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)$$

례 10. 다음 함수의 그라프를 그려라.

1) $y = \sqrt{\sin^2 x - 1}$

2) $y = |\tan x| \cdot \cos x$

3) $y = \cos(\sin x)$

(풀이) 1) $y = \sqrt{\sin^2 x - 1} = \sqrt{-\cos^2 x}$

$$-\cos^2 x \geq 0$$

$\therefore \ \cos x = 0$

x 축에서 점 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2},\ 0\right)$ $(k \in Z)$ 들의 모임이다.

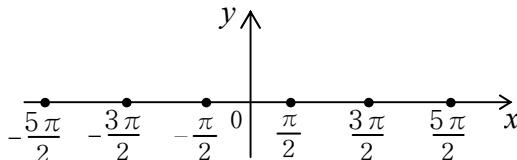



그림 3－2

2) $y = |\tan x| \cdot \cos x = \begin{cases} \sin x & \left(x \in [k\pi,\ k\pi + \frac{\pi}{2})\right) \\ -\sin x & \left(x \in [k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi)\right) \end{cases}$

$y=\sin x$의 주기는 2π이므로 주어진 함수의 주기는 2π이다. 한편

$$|\tan(-x)|\cos(-x)=|\tan x|\cos x$$

이므로 주어진 함수는 짝함수이다.

따라서 그라프는 $x\in[0, k\pi)\cup(\frac{\pi}{2}, \pi]$에서 y축에 관하여 대칭이다.

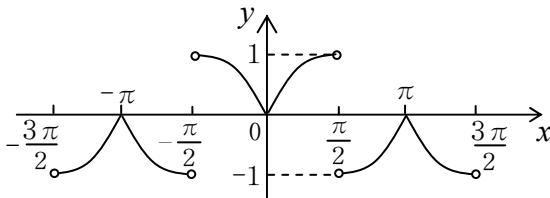



그림 3－3

3) 뜻구역은 R, 값구역은 $[\cos 1, 1]$이다.

$\cos[\sin(x+\pi)]=\cos(\sin x)$

이므로 짝함수이다.

$x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$일 때 $\sin x$가 0부터 1까지 증가하므로 y의 값은 1부터 $\cos 1$까지 감소한다.

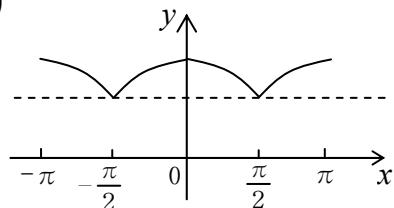



그림 3－4

례 11. x가 4사분구의 각일 때 함수

$$y=f(x)=\cos x\cdot\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}+\sin x\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

의 주기와 최대값, 최소값을 구하고 그라프를 그려라.

(풀이) 조건으로부터 $\sin x<0, \cos x>0$

$$y=f(x)=\cos x\cdot\frac{1-\sin x}{\cos x}+\sin x\cdot\frac{1-\cos x}{-\sin x}$$

$$=1-\sin x-1+\cos x$$

$$=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore\ x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2},\ 2k\pi\right) (k \in Z)$

뜻구역으로부터 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \le 1$

즉 $y \in (1, \sqrt{2}]$ 이므로 최대값은 $\sqrt{2}$ 이고 최소값은 없다.
함수의 주기는 2π 이다.
그라프는 그림 3－5와 같다.

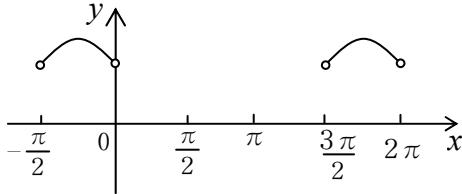



그림 3－5

례 12. $(1+\tan 1°)\cdot(1+\tan 2°)\cdot \cdots \cdot(1+\tan 44°)$의 값을 구하여라.

(풀이) $1+\tan k° = \tan 45° + \tan k° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \frac{\sin k°}{\cos k°}$

$$= \frac{\sin(45°+k°)}{\cos 45° \cos k°} = \frac{\sqrt{2}\sin(45°+k°)}{\cos k°}$$

주어진 식＝

$$= \frac{\sqrt{2}\sin(45°+1°)}{\cos 1°}\cdot\frac{\sqrt{2}\sin(45°+2°)}{\cos 2°}\cdot \cdots \cdot\frac{\sqrt{2}\sin(45°+44°)}{\cos 44°}$$

$$= \frac{2^{22}\cdot\sin 46°\cdot\sin 47°\cdot \cdots \cdot\sin 89°}{\cos 1°\cdot\cos 2°\cdot \cdots \cdot\cos 44°}$$

$$= \frac{2^{22}\cdot\sin(90°-44°)\cdot\sin(90°-43°)\cdot \cdots \cdot\sin(90°-1°)}{\cos 1°\cdot\cos 2°\cdot \cdots \cdot\cos 44°} = 2^{22}$$

례 13. $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)$를 증명하여라.

(증명) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$$= 4\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\alpha\right)$$

$$= 4\sin\alpha(\sin 60° - \sin\alpha)(\sin 60° + \sin\alpha)$$

$$= 16\sin\alpha\sin\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 4\sin\alpha\sin(60° - \alpha)\sin(60° + \alpha)$$

례 14. 1) $\cos 10° \cdot \cos 30° \cdot \cos 50° \cdot \cos 70°$ 의 값을 구하여라.

2) $\tan 7° \cdot \tan 13° \cdot \tan 27° \cdot \tan 33° \cdot \tan 47° \cdot$

$\cdot \tan 53° \cdot \tan 67° \cdot \tan 73° \cdot \tan 87° = \tan 63°$

를 증명하여라.

(풀이) 1) 주어진 식＝

$$= \cos 30° \cdot \cos 10° \cdot \cos(60° - 10°) \cdot \cos(60° + 10°)$$

$$= \cos 30° \frac{1}{4}\cos(3 \times 10°) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

2) 왼변＝

$$= (\tan 53° \cdot \tan 7° \cdot \tan 73°) \cdot (\tan 47° \cdot \tan 13° \cdot \tan 67°) \cdot$$

$$\cdot (\tan 33° \cdot \tan 27° \cdot \tan 87°)$$

$$= \tan(3 \times 7)° \cdot \tan(3 \times 13)° \cdot \tan(3 \times 27)°$$

$$= \tan 21° \cdot \tan 39° \cdot \tan(180° - 99°)$$

$$= -\tan(60° - 39°) \cdot \tan 39° \cdot \tan(60° + 39°)$$

$$= -\tan(3 \times 39)° = -\tan(180° - 63°) = \tan 63° = \text{오른변}$$

례 15. $\sec 2\theta = 2\sec\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta$ 를 리용하여

$$\mathrm{cosec}\,2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$$

임을 증명하여라.

(증명) 조건으로부터

$$\frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{2}{\cos\theta\sin\theta}$$

즉 $1 = \dfrac{2\cos 2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

량변을 $\sin 2\theta$ 로 나누면

$$\frac{1}{\sin 2\theta} = \frac{2\cos 2\theta}{\sin 2\theta\cos\theta\sin\theta} = \frac{\cos 2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta} = \mathrm{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$$

례 16. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$$

임을 증명하여라.

(증명) 왼변$=(\sin\alpha+\sin\beta)+[\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\alpha+\gamma+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha-\beta-\gamma}{2}$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right]$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left[-2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{-\beta-\gamma}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\text{오른변}$$

례 17. 다음 함수의 최대값과 최소값을 구하여라.

1) $y=\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

2) $y=\frac{\operatorname{cosec}^2x-\tan^2x}{\cot^2x+\tan^2x-1}$

3) $y=\sin x+\cos x+2\sin x\cos x$

4) $y=\sin x\cos^3x$

(풀이) 1) $y=\cos x+\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x$

$$=\frac{3}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$|\cos x|\le 1$이므로 함수의 최대값은 $\sqrt{3}$, 최소값은 $-\sqrt{3}$ 이다.

2) $y=\frac{\cos ec^2x-\tan^2x}{\cot^2x+\tan^2x-1}=\frac{1+\frac{1}{\tan^2x}-\tan^2x}{\frac{1}{\tan^2x}+\tan^2x-1}$

$$= \frac{2-(\tan^4 x - \tan^2 x + 1)}{\tan^4 x - \tan^2 x + 1} = \frac{2}{\left(\tan^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - 1$$

따라서 $\tan^2 x - \frac{1}{2} = 0$ 일 때 y 는 최대값 $2 \times \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3}$ 를 가진다.

즉 $\tan^2 x = \frac{1}{2}$ 일 때 함수의 최대값은 $\frac{5}{3}$ 이고 최소값은 없다.

3) $y = (\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 - 1$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \left[\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 - 1$$

$$= 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$= 2\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\right]^2 - \frac{5}{4}$$

$|\sin x| \le 1$ 이므로 함수의 최대값은 $1+\sqrt{2}$, 최소값은 $-\frac{5}{4}$ 이다. (여기서 $1-\sqrt{2}$ 는 최소값이 아니다.)

4) 량변을 2제곱하면

$$y^2 = \sin^2 x \cos^6 x = \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^3$$

$$= 27\sin^2 x \left(\frac{1-\sin^2 x}{3}\right)\left(\frac{1-\sin^2 x}{3}\right)\left(\frac{1-\sin^2 x}{3}\right)$$

$\sin^2 x + \frac{1-\sin^2 x}{3} + \frac{1-\sin^2 x}{3} + \frac{1-\sin^2 x}{3} = 1$ (상수)

이므로 $\sin^2 x = \frac{1-\sin^2 x}{3}$ 일 때 y^2 은 최대값을 가진다.

즉 $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ 일 때 y^2 의 최대값은

$$y^2=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{3^3}{4^4}$$

즉 $y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 이다.

따라서 함수의 최대값은 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$, 최소값은 $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 이다.

례 18. 다음 함수들의 최대값, 최소값을 구하여라.

1) $y=\sqrt{3-x}-\sqrt{x}-1$

2) $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x^2}{1+x^2}+1$

(풀이) 1) x 가 취할수 있는 값범위는

$$x=3\sin^2\theta\left(\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$y=\sqrt{3-3\sin^2\theta}-\sqrt{3\sin^2\theta}-1=\sqrt{3}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta-1$$

$$=\sqrt{3}\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-1$$

$\theta\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 이므로 $\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$

$\frac{\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{4}$ 즉 $\theta=0$ 일 때

$$y_{\max}=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{3}-1$$

$\frac{\pi}{4}-\theta=-\frac{\pi}{4}$ 즉 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 일 때

$$y_{\min}=-\sqrt{3}-1$$

2) x 가 취할수 있는 값범위가 $x\in\mathrm{R}$ 이므로

$$x=\tan\theta\left(\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$y=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}-\frac{2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}+1$$

$$=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}+\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\sec\theta}+\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$=\sin\theta+\cos 2\theta=\sin\theta+1-2\sin^2\theta$$

$$=-2\left(\sin^2\theta-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{8}=-2\left(\sin\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

$\sin\theta=\frac{1}{4}$ 일 때 주어진 함수는 최대값 $\frac{1}{8}$ 을 가지고 최소값은 없다.

례 19. 변의 길이가 a 인 바른4각형 ABCD가 있다. E는 BC의 한 점이고 BE＝$\frac{a}{3}$, F는 DC의 연장선의 한 점이고 CF＝$\frac{a}{2}$ 이다. AE와 BF가 사귀는 점을 G라고 할 때 G는 바른4각형 ABCD의 외접원둘레에 놓인다는것을 증명하여라.

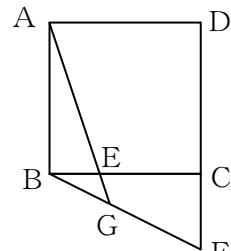
(증명) ∠AEB＝α, ∠CBF＝β, ∠AGB＝θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

직3각형 ABE에서

$$\tan\alpha=\frac{\text{AB}}{\text{BE}}=\frac{a}{\frac{a}{3}}=3$$

그림 3－6

직3각형 BCF에서

$$\tan\beta=\frac{\text{CF}}{\text{BC}}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

한편 ∠ACB＝$\frac{\pi}{4}$ 이므로 G는 활등 $\overset{\frown}{\text{AB}}$ 에 있다.

례 20. △ABC에서 $AB=2$, $AC=\sqrt{3}$, $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$이다. 점 A를 지나며 ∠A 안으로 직선을 긋고 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle AEC}$ 되게 B, C에서 그 직선에 수직선을 그어 밑점을 D, E라고 하자. 점 A를 지나며 AD와 각 $\dfrac{\pi}{4}$를 이루는 직선을 AD에 관하여 AB와 같은쪽에 긋고 B에서 그 직선에 수직선을 그어 그 밑점을 F라고 할 때

그림 3－7

1) $S_{\triangle AFB}$와 $S_{\triangle ABD}$의 비를 구하여라.

2) DF의 길이를 구하여라.

(풀이) 1) $\angle A=\dfrac{\pi}{4}$, $\angle FAD=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\angle CAD=\angle BAF=\alpha$$

직3각형 BAF와 직3각형 CAE에서

$$AF=AB\cdot\cos\alpha,\ AE=AC\cdot\cos\alpha$$

$$S_{\triangle AFB}:S_{\triangle ABD}=S_{\triangle AFB}:S_{\triangle AEC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AF\cdot\sin\alpha:\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AE\cdot\sin\alpha$$

$$=2\cdot AF:\sqrt{3}\,AE$$

$$=2\cdot 2\cos\alpha:\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cos\alpha=4:3$$

2) 네 점 A, F, B, D가 한 원둘레에 있으므로 이 원의 직경은 AB이다. 점 D, F를 맺으면 시누스정리에 의하여

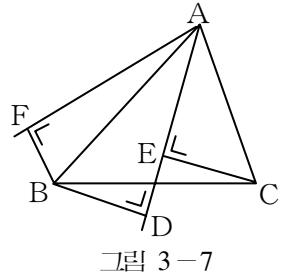
$$\frac{DF}{\sin\frac{\pi}{4}}=AB=2$$

$$\therefore\ DF=\sqrt{2}$$

례 21. △ABC에서

$$a+c=2b\cos\frac{A}{2} \qquad ①$$

$$c^2=a(a+b) \qquad ②$$

일 때 a, b, c의 크기순서를 정하고 ∠A의 값을 구하여라.

(풀이) 식 ②로부터

$$c^2 - a^2 = ab$$

코시누스정리와 $c^2 - a^2 = 2bc\cos A - b^2$ 으로부터

$$ab = 2bc\cos A - b^2$$

즉 $a = 2c\cos A - b$ (＊)

식 (＊)에 의하여 $b = c\cos A + a\cos C$ 를 갈아넣으면

$$a = 2c\cos A - (c\cos A + a\cos C)$$
$$= c\cos A - a\cos C$$

시누스정리 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 에 의하여 웃식은

$\sin A = \sin C \cdot \cos A - \sin A \cdot \cos C = \sin(C - A)$ ③

식 ②로부터 $c > a$

∴ $180° > C > A$

식 ③으로부터 $A = C - A$ 즉

$$C = 2A,\ B = 180° - 3A$$

식 ①을 변형하면

$$\sin A + \sin 2A = 2\sin(180° - 3A)\cos\frac{A}{2}$$
$$= 2\sin 3A \cdot \cos\frac{A}{2}$$

즉 $2\sin 3A \cdot \cos\frac{A}{2} = 2 \cdot 2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{A}{2} \neq 0$ 이므로 $1 = 2 \cdot \cos\frac{3A}{2}$ 이고

$$\frac{3A}{2} = 60°$$

∴ $A = 40°,\ C = 80°,\ B = 180° - 120° = 60°$

∴ $a : b : c = \sin 40° : \sin 60° : \sin 80°$

따라서 a, b, c 의 크기관계는 $a < b < c$ 이다.

$$\angle A = 40°$$

2) 련습문제

− 선택문제

1. 각 θ의 시작변과 x축의 정의 반축이 일치하고 끝변은 점

P$(-4t,\ 3t)$($t \in \mathrm{R},\ t \neq 0$)를 지난다고 하면 $2\sin\theta + \cos\theta$의 값은 ( )이다.

A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $-1\ (t>0)$ 또는 $1(t<0)$

D. $\frac{2}{5}(t>0)$ 또는 $-\frac{2}{5}(t<0)$

2. $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}(k \in \mathrm{Z})$, $\mathrm{M} = \frac{\sin\alpha + \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$일 때 M의 값은 ( )이다.

A. 부값 B. 부 아닌 값 C. 정수값

D. 정일수도 있고 부일수도 있다.

3. $f(\cos x) = \sin 2x$일 때 $f(\sin x)$는 ( )와 같다.

A. $\sin 2x$ B. $\cos 2x$ C. $-\cos 2x$ D. $-5\sin 2x$

4. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$일 때 $\sqrt{\frac{1-\cos(\pi-\alpha)}{2}}$의 값은 ( )이다.

A. $\cos\frac{\alpha}{2}$ B. $\sin\frac{\alpha}{2}$ C. $-\cos\frac{\alpha}{2}$ D. $\pm\sin\frac{\alpha}{2}$

5. 함수 $y = |\sin x| + |\cos x|$의 값구역은 ( )이다.

A. $[-1,\ 2]$ B. $[1,\ \sqrt{2}]$ C. $[-2,\ 2]$ D. $(0,\ 2)$

6. 다음 세가지 조건

1) 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가

2) 주기는 π

3) 짝함수

를 만족하는것은 ( )이다.

A. $y = \tan x$ B. $y = 10^{-\cos x}$ C. $y = \sin|x|$ D. $y = |\sin x|$

7. $\tan 100° = a$일 때 $\cos 20°$의 값은 ( )이다.

A. $\frac{a^2-1}{a^2+1}$ B. $\frac{1-a^2}{1+a^2}$ C. $\frac{2a}{1+a^2}$ D. $\pm\frac{1-a^2}{1+a^2}$

8. $2\alpha + \beta = \pi$일 때 $y = \cos\beta - 6\sin\alpha$의 최대값과 최소값은 ( )이다.

A. $y_{최대} = 7,\ y_{최소} = -\frac{11}{2}$ B. $y_{최대} = 5,\ y_{최소} = -\frac{11}{2}$

C. $y_{최대} = 7,\ y_{최소} = 5$ D. $y_{최대} = 7,\ y_{최소} = -5$

- **빈칸채우기문제**

9. 함수 $y=\sqrt{\cot x \operatorname{cosec} x}$ 의 뜻구역은 ＿＿＿

10. 함수 $y=\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x}$ 의 값구역은 ＿＿＿

11. 함수 $y=\cos^4 x-\sin^4 x$ 의 주기는 ＿＿＿

12. 함수 $y=\sin x+\cos x=\mathrm{A}\sin(x+\varphi)$ 에서

A=＿＿＿ （A＞0），φ=＿＿＿$\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

함수 $y=\sin x+\cos x=\mathrm{B}\sin(x+\alpha)$ 에서

B=＿＿＿ （B＜0），α=＿＿＿$(0\le\alpha\le\pi)$

13. $\tan x+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\tan x\cdot\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$=＿＿＿

- **해답문제**

14. 다음 같기식을 증명하여라.

$$\frac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{(1-\tan x)^2}{(1-\cot x)^2}$$

15. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ\cos 10^\circ}}{\cos 10^\circ-\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$$

16. 다음 함수의 주기를 구하여라.

1） $y=\sin^6 x+\cos^6 x$

2） $y=\tan\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}$

17. $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}<y<\dfrac{3\pi}{4}$，$\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}+x\right)=\dfrac{5}{13}$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-y\right)=\dfrac{3}{5}$ 일 때 $\sin(x+y)$의 값을 구하여라.

18. sinA＋sin3A＋sin5A＝a，cosA＋cos3A＋cos5A＝b 일 때 다음의 식을 증명하여라.

1） $b\ne 0$일 때 tan3A＝$\dfrac{a}{b}$　　2） $(1+2\cos 2\mathrm{A})^2=a^2+b^2$

19. $f(x)=\cos^2 x+2m\sin x-2m-2\left(m\le 0,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\right)$이다.

1) x가 어떤 값일 때 $f(x)$가 최대값을 가지겠는가?

2) $f(x)$의 값이 늘 0보다 작으면 m이 취할수 있는 값범위는 얼마인가?

20. 함수 $f(x)=2a\sin^2 x-2\sqrt{3}a\sin x\cos x+a+b$의 뜻구역은 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, 값구역은 [－5, 1]일 때 상수 a, b를 구하여라.

21. 수표를 리용하지 말고 다음의 값을 구하여라.

1) $\sin^2 43°+\cos^2 73°+\sin 43°\cos 73°$

2) $\dfrac{1}{\cos 50°}+\tan 10°$

3) 자체시험문제

－ 선택문제

1. $P=\left\{\cos\dfrac{m\pi}{3}\ (m\in Z)\right\}$, $Q=\left\{\sin\dfrac{(2n-3)\pi}{3}\ (n\in Z)\right\}$일 때 P와 Q의 관계는 ( )이다.

A. $P\subset Q$ B. $P\supset Q$ C. $P=Q$ D. $P\cap Q=\varnothing$

2. 함수 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$의 그라프는 $y=3\sin 2x$의 그라프를 다음과 같이 평행이동하여 얻는다. 이때 정확한것은 ( )이다.

A. 오른쪽으로 $\dfrac{\pi}{3}$만큼 평행이동

B. 왼쪽으로 $\dfrac{\pi}{3}$만큼 평행이동

C. 오른쪽으로 $\dfrac{\pi}{6}$만큼 평행이동

D. 왼쪽으로 $\dfrac{\pi}{6}$만큼 평행이동

3. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$가 한주기안에서 $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 최대값 2를 가지고 $x=0$일 때 최소값 －2를 가진다면 함수의 식은 반드시 ( )이다.

A. $y = 2\sin\frac{3x}{2}$　　B. $y = 2\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

C. $y = 2\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$　　D. $y = -2\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$

4. 다음 안갈기식가운데서 정확한것은 (　　)이다.

A. $\sin 3 < \cot(-3) < \cos 3$　　B. $\cos 3 < \sin 3 < \cot(-3)$

C. $\cot(-3) < \cos 3 < \sin 3$　　D. $\cot(-3) < \sin 3 < \cos 3$

－ 빈칸채우기문제

5. 각 α 의 끝변의 한 점 P의 자리표가 $(-t,\ 2t)(t \neq 0)$일 때 $\sin\alpha\tan\alpha\sec\alpha$ 의 값은 _____이다.

6. $y = \cot x - \tan x$ 의 주기는 _____이다.

7. 함수 $y = \sqrt{-\tan^2 x + \left(\sqrt{3}+1\right)\tan x - \sqrt{3}}$ 의 뜻구역은 _____이다.

8. 함수 $y = 5\cos^2 x + 6\sin x\cos x + \sin^2 x$ 의 값구역은 _____이다.

－ 해답문제

9. $\sin A = b\sin B$, $a\tan A = \tan B\left(|a| \neq 1\right)$일 때 $\sin A$의 값을 구하여라.

10. 함수 $\sqrt{y} = |\cos\pi x - \sin\pi x|\ \left(x \in [-1,\ 1]\right)$의 그라프를 그려라.

11. 함수 $y = \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 의 최대값과 그 최대값을 취할 때 x 의 값을 구하여라.

4. 거꿀삼각함수와 삼각방정식

1) 문제풀이방법

례 1. 다음의 식들가운데서 의미를 가지지 않는것은 (   )이다.

A. $\arcsin\frac{\pi}{4}$ B. $\arctan\frac{\pi}{2}$

C. $\arccos\frac{\pi}{3}$ D. $\mathrm{arccot}0$

(풀이) C

$\arccos x$ 의 뜻구역은 [−1, 1]이다. 그런데 $\frac{\pi}{3}>1$ 이므로 $\arccos\frac{\pi}{3}$는 무의미하다.

례 2. 다음 식들의 값을 계산하여라.

1) $\sin(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$ 2) $\cos(\arccos\frac{a^2+1}{2a})\ (a>0)$

3) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{5})$ 4) $\arcsin(\cos\frac{6\pi}{7})$

5) $\arctan(\cot\frac{14\pi}{5})$ 6) $\arccos(\cos 8)$

7) $\arcsin(\sin 10)$

(풀이) 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\in[-1,\ 1]$이므로

$$\sin(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $a^2+1\geq 2a\ (a>0)$이므로 $\frac{a^2+1}{2a}\geq 1$

따라서 $a=1$일 때 $\frac{a^2+1}{2a}>1$, $\cos(\arccos\frac{a^2+1}{2a})$은 존재하지 않는다.

3) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{5})=\arcsin[\sin(\pi+\frac{2\pi}{5})]$

$$=\arcsin(-\sin\frac{2\pi}{5})$$

$$=-\arcsin(\sin\frac{2\pi}{5})=-\frac{2\pi}{5}$$

4) $\arcsin(\cos\frac{6\pi}{7})=\arcsin[\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{6\pi}{7})]$

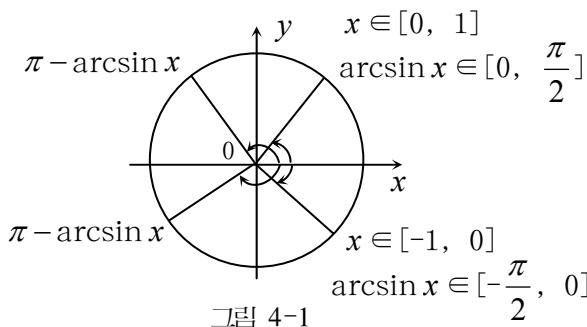
$$=\arcsin[\sin(-\frac{5\pi}{14})]=-\frac{5\pi}{14}$$

5) $\arctan(\cot\frac{14\pi}{5})=\arctan[\cot(\frac{14\pi}{5}-2\pi)]$

$$=\arctan(\cot\frac{4\pi}{5})=\arctan[\cot(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{10})]$$

$$=\arctan[\tan(-\frac{3\pi}{10})]=-\frac{3\pi}{10}$$

6) $\arccos(\cos 8)=\arccos[\cos(8-2\pi)]=8-2\pi$

7) $\arcsin(\sin 10)=\arcsin[\sin(3\pi-10)]=3\pi-10$

례 3. $y=\sin x\left(x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]\right)$의 거꿀함수를 여러가지 방법으로 풀어라.

(풀이) 이 문제는 3가지 방법으로 풀수 있다.

1) 단위원법(그림 4-1)

$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right](x\in[0, 1])$이므로

$\arcsin x\in[0, \frac{\pi}{2}]$은 정의 각이다.

그림 4-1

따라서 $y = \sin x$ 의 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$에서의 거꿀함수는 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에 있다.

$y = \pi - \arcsin x$ 로 표시할 때 $x \in [-1, 0)$ 이면

$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$은 부의 각으로 된다.

따라서 $y = \sin x$ 의 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$에서의 거꿀함수는 $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ 에 있다.

이것을 $y = \pi - \arcsin x$ 로 표시하면 $x \in [-1, 1]$ 일 때

$y = \sin x$ 의 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$에서의 거꿀함수는

$y = \pi - \arcsin x$ 이다.

2) 치환법

$t = \pi - x$ 라고 하면 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$이므로

$$t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$x = \pi - t$ 를 주어진 식에 갈아넣으면

$$y = \sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$$

를 얻는다.

$\therefore \ t = \arcsin y$ 즉

$\pi - x = \arcsin y$

따라서 $x = \pi - \arcsin y$ 즉

$y = \pi - \arcsin x$

3) 그라프법(그림 4-2)

$y = \arcsin x \ \left(x \in [-1, 1],\right.$

$\left. y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 의 그라프는

y 축에 관하여 $-\arcsin x$ 의 그라프와 대칭이다. 그리하여 웃쪽으로 π 만큼 평행이동하면

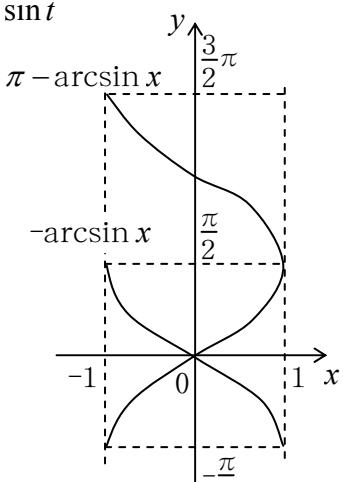



그림 4−2

$y=\pi-\arcsin x$ 의 그라프를 얻는다.

이것은 $y=\sin x$ 의 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 에서의 거꿀함수의 그라프이다.

례 4. 다음의 값들을 계산하여라.

1) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$

2) $\sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arctan 2\sqrt{3}\right)$

(풀이) 1) $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}=\alpha$ 라고 하면

$$\cos\alpha=\frac{1}{8}\ \left(\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{8}}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

2) $\arctan\frac{1}{3}=\alpha$, $\arctan 2\sqrt{3}=\beta$ 라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{1}{3},\ \tan\beta=2\sqrt{3}\ \left(\alpha,\ \beta\in(0, \frac{\pi}{2})\right)$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{\tan^2\beta+1}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore\ \sin\left(2\arctan\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\arctan 2\sqrt{3}\right)=\sin 2\alpha+\cos\beta$$

$$=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\cos\beta$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}}+\frac{\sqrt{13}}{13}=\frac{39+5\sqrt{13}}{65}$$

례 5. 함수 $y=\cos(2\arcsin x)+2\sin(\arcsin x)$의 최대값과 최소값을 구하여라.

(풀이) $\arcsin x=\alpha$ 라고 하면 $\sin\alpha=x$ $\left(\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$$\therefore\ y=\cos(2\arcsin x)+2\sin(\arcsin x)$$
$$=\cos 2\alpha+2\sin\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha+2\sin\alpha$$
$$=-2x^2+2x+1$$
$$=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\ (-1\le x\le 1)$$

$x=\frac{1}{2}$일 때 $y_{최대}=\frac{3}{2}$

$x=-1$일 때 $y_{최소}=-3$

례 6. 크기를 비교하여라.

1) $\arcsin x$와 $\arccos x$

2) $\arccos(1-x)$와 $\arccos 2x$

(풀이) 1) $\arcsin x-\arccos x=\arcsin x-(\frac{\pi}{2}-\arcsin x)$

$$=2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$$

$2\arcsin x-\frac{\pi}{2}>0$ 즉 $\arcsin x>\frac{\pi}{4}$일 때 $\frac{\sqrt{2}}{2}<x\le 1$

$2\arcsin x-\frac{\pi}{2}=0$ 즉 $\arcsin x=\frac{\pi}{4}$일 때 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\arcsin x-\frac{\pi}{2}<0$ 즉 $\arcsin x<\frac{\pi}{4}$일 때 $-1\le x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{2}}{2}<x\le 1$일 때 $\arcsin x>\arccos x$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 $\arcsin x=\arccos x$

$-1 \le x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 $\arcsin x < \arccos x$

2) 먼저 두 식이 의미를 가지는 x의 값들을 고찰하자.

$$\begin{cases} -1 \le 1-x \le 1 \\ -1 \le 2x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

$y = \arccos x$ 는 뜻구역에서 감소함수로 되므로

$\begin{cases} 1-x > 2x \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 즉 $0 \le x < \dfrac{1}{3}$ 일 때

$$\arccos(1-x) < \arccos 2x$$

$\begin{cases} 1-x = 2x \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 즉 $x = \dfrac{1}{3}$ 일 때

$$\arccos(1-x) = \arccos 2x$$

$\begin{cases} 1-x < 2x \\ 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 즉 $\dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{1}{2}$ 일 때

$$\arccos(1-x) > \arccos 2x$$

례 7. 함수 $y = \arctan x + \arctan\dfrac{1-x}{1+x}$ 가 주어졌다. 이 함수의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

(풀이) 뜻구역은 $x \ne -1$ 인 모든 실수 즉

$$\tan y = \frac{x + \dfrac{1-x}{1+x}}{1 - x\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1 \ (-\pi < y < \pi)$$

$\therefore\ y = -\dfrac{3\pi}{4}$ 또는 $y = \dfrac{\pi}{4}$ 즉 값구역은 $\left\{-\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right\}$ 이다.

례 8． 1) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}$를 간단히 하여라.

2) $\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)-\arccos\frac{1}{7}=\frac{\pi}{3}$임을 증명하여라.

(풀이) 1) $\arcsin\frac{3}{5}=\alpha$, $\arcsin\frac{15}{17}=\beta$라고 하면

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{15}{17}$이고 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=\frac{8}{17}$를 구할수 있다.

$$\therefore\ \sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}\right)=\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{7}{18}+\frac{4}{5}\times\frac{15}{17}=\frac{84}{85}$$

$\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$이므로

$$\therefore\ \alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$$

$$\therefore\ \arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{15}{17}=\pi-\arcsin\frac{84}{85}$$

2) 왼변에 코시누스를 취하면

$$\cos\left[\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)-\arccos\frac{1}{7}\right]=$$

$$=\cos\left[\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)\right]\cos\left(\arccos\frac{1}{7}\right)$$

$$+\sin\left[\arccos\left(-\frac{11}{14}\right)\right]\sin\left(\arccos\frac{1}{7}\right)$$

$$=\left(-\frac{11}{14}\right)\cdot\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$$

$\arccos\left(-\frac{11}{14}\right) > \arccos\frac{1}{7}$ 이므로

$\arccos\left(-\frac{11}{14}\right) - \arccos\frac{1}{7} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \arccos\left(-\frac{11}{14}\right) - \arccos\frac{1}{7} = \arccos\frac{1}{2}$

즉 $\arccos\left(-\frac{11}{14}\right) - \arccos\frac{1}{7} = \frac{\pi}{3}$

례 9. 다음 삼각방정식을 풀어라.

1) $2\sin^2 x - 1 = 0$ 2) $4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$

3) $3\tan^2\frac{x-45°}{3} - 1 = 0$ 4) $\cot^2 x + 2\sqrt{2} = 3$

(풀이) 1) $2\sin^2 x - 1 = 0$ 에 대하여

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 얻는다. 풀이모임은

$$\left\{x \middle| x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{4}\ (k \in Z)\right\}$$

2) $4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$ 으로부터

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 얻는다.

$\therefore\ x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6},\quad x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$

따라서 풀이모임은

$$\left\{x \middle| x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}\ (k \in Z)\right\} \cup \{x | x = 2k\pi\ (k \in Z)\}$$

$$\cup \{x | x = (2k+1)\pi\ (k \in Z)\} \cup \left\{x \middle| x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}\ (k \in Z)\right\}$$

3） $3\tan^2\dfrac{x-45^\circ}{3}-1=0$ 으로부터

$$\tan\frac{x-45^\circ}{3}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \frac{x-45^\circ}{3}=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

를 얻는다.

$$x=3k\pi\pm\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$$

따라서 풀이모임은

$$\left\{x\middle|x=3k\pi+\frac{3}{4}\pi\ (k\in \mathrm{Z})\right\}\cup\left\{x\middle|x=3k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in \mathrm{Z})\right\}$$

4） $\cot^2 x+2\sqrt{2}=3$ 으로부터

$$\cot x=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)$$

을 얻는다.

따라서 풀이모임은 $\left\{x\middle|x=k\pi\pm\dfrac{3\pi}{8}(k\in \mathrm{Z})\right\}$ 이다.

례 10. 방정식 $2\sin 2x-3\cos^2 x=a-1$ 이 모두 실수풀이를 가지는 실수 a 의 값범위를 구하여라.

(풀이) 먼저 방정식을 변형하면

$$(a-1)\sin^2 x-4\sin x\cos x+(a+2)\cos^2 x=0$$

$$(a-1)\tan^2 x-4\tan x+(a+2)=0$$

$\tan x\in \mathrm{R}$ 이므로

$$\mathrm{D}=16-4(a-1)(a+2)\ge 0$$

즉 $a^2+a-6\le 0$

풀이는 $-3\le a\le 2$

(다른 풀이) 주어진 방정식을 변형하면

$$2\sin 2x-3\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}=a-1$$

$$4\sin 2x-3\cdot\cos 2x=2a+1$$

$$5\sin(2x-\varphi)=2a+1$$

$$\sin(2x-\varphi)=\frac{2a+1}{5}$$

방정식은 실수풀이를 가지므로

$$-1 \le \frac{2a+1}{5} \le 1$$

풀이는 $-3 \le a \le 2$ 이다.

례 11. $a \ne 0$ 이고 $|a| \ne 1$ 일 때 방정식

$$a\sin^2 x - (a^2+1)\cdot\sin x + a = 0$$

은 $[0,\ 2\pi)$ 에서 두개의 풀이를 가진다는것을 증명하고 그 풀이들을 구하여라.

(풀이) 주어진 방정식을

$$(a\sin x - 1)(\sin x - a) = 0$$

으로 변형하면

$$\sin x = a \quad \text{또는} \quad \sin x = \frac{1}{a}\ (a \ne 0)$$

을 얻는다.

$|a| < 1$ 일 때 $\sin x = a$ 는 풀이를 가지며 $\sin x = \frac{1}{a}$ 은 풀이를 가지지 않는다. $[0,\ 2\pi)$ 에서 $0 < a < 1$ 이면

$$x_1 = \arcsin a,\quad x_2 = \pi - \arcsin a$$

$-1 < a < 0$ 이면

$$x_1 = \pi - \arcsin a,\quad x_2 = 2\pi + \arcsin a$$

$|a| > 1$ 이면 $\sin x = a$ 는 풀이를 가지지 않으며 $\sin x = \frac{1}{a}$ 은 풀이를 가진다. $[0,\ 2\pi)$ 에서 $a > 1$ 이면

$$x_1 = \arcsin\frac{1}{a},\quad x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{a}$$

$a < -1$ 이면

$$x_1 = \pi - \arcsin\frac{1}{a},\quad x_2 = 2\pi + \arcsin\frac{1}{a}$$

$a \ne 0$ 이고 $|a| \ne 1$ 일 때 방정식은 $[0,\ 2\pi)$ 에서 두개의 풀이를 가진다.

례 12. 방정식 $\sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$ 을 풀어라.

(풀이) 이 방정식의 상수마디가 1로 되면 인수분해할수 있다. 그러나 -1이면 인수분해할수 없으므로 변수대입법을 리용한다.

$$\sin x + \cos x = t\,,\quad \sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$t + \frac{t^2 - 1}{2} - 1 = 0$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0,\quad (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore\ t = 1,\ \ t = -3$$

즉 $\sin x + \cos x = 1$ 또는 $\sin x + \cos x = -3$ (버린다.)

그러면 $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 또는 $x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$

방정식의 풀이는 $x_1 = 2k\pi\,,\ \ x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in \mathrm{Z})$

례 13. 다음 방정식들을 풀어라.

1) $\cos(\lg x) = \sin(\lg\sqrt{x})$ 2) $\log_{\cos 2x}\sin 2x = 1$

(풀이) 1) $\lg x = t$ 라고 하면

$$\cos t = \sin\frac{t}{2}$$

$$1 - 2\sin^2\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}$$

$$2\sin^2\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2} - 1 = 0$$

$$\left(2\sin\frac{t}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{t}{2} + 1\right) = 0$$

$$\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin\frac{t}{2} = -1$$

$$\therefore\ \frac{t}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6},\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ t = 4k\pi + \frac{\pi}{3},\ 4k\pi + \frac{5\pi}{3} \text{ 또는 } 4k\pi - \pi$$

즉 $x=10^{4k\pi+\frac{\pi}{3}}$ 또는 $10^{4k\pi+\frac{5\pi}{3}}$ 또는 $10^{(4k-1)\pi}$ $(k\in \mathrm{Z})$

2) 주어진 방정식을 다음과 같이 고칠수 있다.

$$\begin{cases}\sin 2x>0\\ \cos 2x>0,\ \cos 2x\neq 1\\ \sin 2x=\cos 2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\tan 2x=1\\ 2x\in\left(2k\pi,\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}\\ x\in\left(k\pi,\ k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

주어진 방정식의 풀이는

$$x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\ (n\in \mathrm{Z})$$

례 14. 1) $\sin A-\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 10°-\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sin 10°$ 를 만족시키는 최소의 뾰족각 A의 값을 구하여라.

2) 방정식 $\dfrac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\dfrac{a\cos x+b}{b\sin x+a}$ $(ab\neq 0)$을 풀어라.

(풀이) 1) 주어진 방정식의 왼변을

$$\sqrt{2}\sin(A-45°)=\sqrt{2}\cos[90°+(45°-A)]$$
$$=\sqrt{2}\cos(135°-A)$$

로 변형하고 오른변을

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)=\sqrt{2}\cos(10°+60°)$$
$$=\sqrt{2}\cos 70°$$

로 변형한다.

$\therefore\ \cos(135°-A)=\cos 70°$

$\therefore\ 135°-A=\pm 70°$, $A=65°$ 또는 $205°$

$A=65°$ 는 최소의 뾰족각이다.

2) 방정식을 변형하면

$$(a\sin x+b)(b\sin x+a)=(b\cos x+a)(a\cos x+b)$$

$$ab\sin^2 x + (a^2+b^2)\sin x + ab = ab\cos^2 x + (a^2+b^2)\cos x + ab$$

$$(\sin x - \cos x)[a^2+b^2+ab(\sin x + \cos x)] = 0$$

이로부터 $\sin x - \cos x = 0$, $\tan x = 1$, $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

$$\sin x + \cos x = -\frac{a^2+b^2}{ab}$$

$a^2+b^2 \geq 2ab$, $ab \neq 0$ 이므로

$$\left|-\frac{a^2+b^2}{ab}\right| \geq 2$$

따라서 이 방정식의 풀이는 없다.

따라서 주어진 방정식의 풀이는 $x = k\pi + \frac{\pi}{4}\ (k \in \mathrm{Z})$

2) 련습문제

1. 다음 식들의 값을 구하여라.

1) arccot0＋arccot(－1)　　2) arctan0＋arctan(－1)

3) $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3})$　　4) $\arccos[\cos(-\frac{7\pi}{5})]$

5) $\arccos(\sin\frac{13\pi}{10})$　　6) $\arctan(\cot\frac{\pi}{3})$

2. 거꿀삼각함수를 리용하여 다음 조건에 맞는 각을 구하여라.

1) $\sin x = \frac{1}{3}\ \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$　　2) $\sin x = -\frac{1}{4}\ \left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$

3) $\cos x = \frac{2}{3}\ \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$　　4) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\ \left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$

5) $\tan x = \frac{5}{3}\ \left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right)$　　6) $\cot x = -\frac{1}{2}\ \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right)$

3. 다음 함수들의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

1) $y = 2\arcsin 2x$　　2) $y = \frac{1}{2}\arccos 3x$

3) $y = 3\arctan\frac{x}{3}$　　4) $y = 2\arcsin(3-2x) + \frac{\pi}{4}$

5) $y = \frac{1}{2}\arccos\sqrt{4-x^2}$　　6) $y = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{2}{x-2}$

7) $y = \sqrt{\arcsin x}$　　8) $y = \frac{1}{\sqrt{\arctan x}}$

4. 다음 식들의 값을 구하여라.

1) $\sin(2\arcsin\frac{3}{5})$　　2) $\sin(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5})$

3) $\cos(2\arccos\frac{2}{3})$　　4) $\cos(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5})$

5) $\sin(\arcsin\frac{1}{4} + \arccos\frac{1}{4})$　　6) $\cos(\arccos\frac{3}{7} + \arccos\frac{9}{11})$

7) $\tan(\arctan\frac{5}{6} + \arctan\frac{3}{8})$

5. 다음 함수들의 거꿀함수를 구하여라.

1) $y = \frac{1}{2}\arcsin 4x$　　2) $y = \pi + \arctan\frac{x}{2}$

6. 다음 식들을 증명하여라.

1) $\arccos\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$

2) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

3) $2\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{4} = \arctan\frac{32}{43}$

4) $\cos(2\arctan x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$　　5) $\cos(\frac{1}{2}\arccos x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

6) $2\arcsin x = \arccos(1-2x^2)$ $(|x| \le 1)$

7. 다음 방정식들을 풀어라.

1) $\sin 2x = \cos 2x - 4\sin^2 x + 1$

2) $2\sin^2 x + \cos^2 x = 4 - 5\sin x \cos x$

3) $8\sin^2 x + 3\sin x - 4 = 0$

4) $\dfrac{\sin 2x}{\sin x+\cos x}-\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1+2\sin x\cos x$

5) $\tan(x+t)(\cos 2x-\dfrac{1}{3})=\sin 2x$

6) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$

3) 자체시험문제

– 선택문제

1. 다음 식에서 뾰족각은 (　)이다.

A. $\arccos[\cos(-\dfrac{2\pi}{3})]=-\dfrac{2\pi}{3}$

B. $\arctan(\cot x)=x\ \left(x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

C. $\sin(\arcsin\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\arcsin(\sin\dfrac{\pi}{4})=\sin(\arcsin\dfrac{\pi}{4})$

2. 구간 $\left[-\dfrac{3}{2},1\right]$에서 함수 $y=x$와 같은 함수는 (　)이다.

A. $y=\arccos(\cos x)$　　B. $y=\arcsin(\sin x)$

C. $y=\sin(\arcsin x)$　　D. $y=\cos(\arccos x)$

3. 함수 $y=\arcsin(\tan x)$의 뜻구역은 (　)이다.

A. $-\dfrac{\pi}{4}\le x\le\dfrac{\pi}{4}$　　B. $k\pi-\dfrac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\dfrac{\pi}{4}\ (k\in Z)$

C. $k\pi+\dfrac{\pi}{4}\le x\le(k+1)\pi-\dfrac{\pi}{4}\ (k\in Z)$

D. $2k\pi-\dfrac{\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}\ (k\in Z)$

4. 다음 모임에서 방정식 $\sin x=\sin\dfrac{4\pi}{5}$의 풀이모임이 아닌것은 (　)이다.

A. $\left\{x\middle|x=k\pi+(-1)^k\dfrac{\pi}{5}(k\in \mathrm{Z})\right\}$

B. $\left\{x\middle|x=k\pi+(-1)^k\dfrac{4\pi}{5}(k\in \mathrm{Z})\right\}$

C. $\left\{x \middle| x = k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{4\pi}{5} (k \in \mathrm{Z})\right\}$

D. $\left\{x \middle| x = 2k\pi + \frac{\pi}{5}\right.$ 또는 $\left. x = 2k\pi + \frac{4\pi}{5} (k \in \mathrm{Z})\right\}$

5. $a = \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$, $b = \arctan(-\sqrt{2})$, $c = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ 사이의 크기관계는 (　)이다.

A. $a < b < c$　　B. $a < c < b$　　C. $b < a < c$　　D. $b < c < a$

6. arcsin(cos2)는 (　)와 같다.

A. $\pi - 2$　　B. $2 - \pi$　　C. $\frac{\pi}{2} - 2$　　D. $2 - \frac{\pi}{2}$

7. $\arctan x < \mathrm{arccot}\, x$의 풀이모임은 (　)이다.

A. $\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$　　B. $(-\infty, 1)$　　C. $(1, +\infty)$　　D. $(-\infty, 0)$

8. $\arccos x > 1$이면 x의 값범위는 (　)이다.

A. $[-1, \cos 1)$　B. $[-1, 0)$　C. $(0, 1]$　D. $(\cos 1, 1]$

9. 방정식 $\sin x + \cos x = k$가 $[0, \pi]$에서 두개의 풀이를 가지면 k의 값범위는 (　)이다.

A. $-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$　　B. $-1 \le k \le \sqrt{2}$

C. $0 \le k < \sqrt{2}$　　D. $1 \le k < \sqrt{2}$

10. $y = (\arcsin x)^2 + 4\arcsin x + 4$의 최소값은 (　)이다.

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{\pi^2}{4} + 2\pi + 4$　　D. $\frac{\pi^2}{4} - 2\pi + 4$

― 해답문제

11. 1) $0 \le x \le 1$일 때 $y = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$를 구하여라.

2) $x \ne 0$이면 $y = \arctan x - \mathrm{arc}\cot\frac{1}{x}$을 계산하여라.

3) 방정식 $\sin 5x + \sin x = 3\cos 2x$를 풀어라.

12. 함수 $y = \arcsin(x^2 - x)$의 뜻구역과 값구역을 구하여라.

13. 방정식 $\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$이 풀이를 가질 때 a의 값을 구하고 방정식의 풀이를 구하여라.

5. 안같기식

1) 문제풀이방법

례 1. x에 관한 안같기식

$$3(a+1)x-3>2ax-3a$$

를 풀어라.

(풀이) 보조변수가 들어간 안같기식을 풀 때에는 안같기식의 기본 성질에 따라 풀이의 범위를 고찰하여야 한다.

주어진 안같기식을 변형하면

$$(a+3)x>3(1-a)$$

① $a>-3$일 때 풀이모임은 $\left\{x \middle| x>\frac{3(1-a)}{a+3}\right\}$

② $a=-3$일 때 $0\cdot x>12$ (모순) $\therefore\ x\in\varnothing$

③ $a<-3$일 때 풀이모임은 $\left\{x \middle| x<\frac{3(1-a)}{a+3}\right\}$

례 2. x에 관한 안같기식

$$2x^2+mx+2>0$$

을 풀어라.

(풀이) 한변수2차안같기식의 풀이는 한변수2차방정식의 풀이를 구하는것으로 얻을수 있다.

$\mathrm{D}=m^2-4\cdot2\cdot2\ge0$일 때 즉 $m\ge4$ 또는 $m\le-4$일 때 방정식 $2x^2+mx+2=0$은 두개의 풀이

$$x_{1,\,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-16}}{4}$$

를 가진다.

① $m=\pm4$일 때 주어진 안같기식의 풀이모임은

$$\left\{x \middle| x\ne-\frac{m}{4}\ (x\in\mathrm{R})\right\}$$

② $m>4$ 또는 $m<-4$일 때 주어진 안같기식의 풀이모임은

$$\left\{x \middle| x>\frac{-m+\sqrt{m^2-16}}{4}\right\}\cup\left\{x \middle| x<\frac{-m-\sqrt{m^2-16}}{4}\right\}$$

③ $-4<m<4$일 때 풀이모임은 $\{x|x\in\mathrm{R}\}$

례 3. 안갈기식 $\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}>0$을 풀어라.

(풀이) 분수안갈기식에 대한 풀이는 련립안갈기식으로 일반화하여 푼다.

주어진 안갈기식은 다음과 같이 바꿀수 있다.

$$\begin{cases} 2x-1>0 \\ x^2-x-2>0 \end{cases} \qquad (1)$$

또는 $$\begin{cases} 2x-1<0 \\ x^2-x-2<0 \end{cases} \qquad (2)$$

식 (1)로부터 풀이는 $x>2$

식 (2)로부터 풀이는 $-1<x<\dfrac{1}{2}$

따라서 주어진 안갈기식의 풀이모임은

$$\{x|x>2\}\cup\left\{x\middle|-1<x<\frac{1}{2}\right\}$$

례 4. 안갈기식 $|x-2|-|2x+5|>2x$를 풀어라.

(풀이) ① $x<-\dfrac{5}{2}$일 때

$$2-x+2x+5>2x$$

$\therefore\ x<7$

풀이모임은 $\left\{x\middle|x<-\dfrac{5}{2}\right\}$

② $-\dfrac{5}{2}\le x\le 2$일 때

$$2-x-2x-5>2x$$

$\therefore\ x<-\dfrac{3}{5}$

풀이모임은 $\left\{x\middle|-\dfrac{5}{2}\le x<-\dfrac{5}{3}\right\}$

③ $x>2$일 때

$$x-2-2x-5>2x$$

$$x < -\frac{7}{3}$$

풀이모임을 가지지 않는다.

따라서 주어진 안갈기식의 풀이모임은 $\left\{x \middle| x > -\frac{3}{5}\right\}$이다.

례 5. 안갈기식 $\sqrt{\lg x - 1} < 3 - \lg x$를 풀어라.

(풀이) 무리안갈기식은 련립안갈기식으로 만들어 풀이를 구한다.

주어진 안갈기식은

$$\begin{cases} \lg x - 1 \geq 0 \\ 3 - \lg x > 0 \\ \lg x - 1 < (3 - \lg x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x < 1000 \\ \lg^2 x - 7\lg x + 10 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 10 \\ x < 1000 \\ x < 100 \text{ 또는 } x > 10^5 \end{cases}$$

따라서 주어진 안갈기식의 풀이모임은 $\{x | 10 \leq x > 100\}$이다.

례 6. 안갈기식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right)} < 1$을 풀어라.

(풀이) $0 < \frac{1}{2} < 1$이므로 지수함수의 성질에 의하여

$$\log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right) > 0$$

이고 3>1이므로 로그함수의 성질에 의하여

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - \frac{4}{5}\right) > 1$$

즉 $\begin{cases} x^2 - \frac{4}{5} > 0 \\ x^2 - \frac{4}{5} < \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 또는 } x < -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

따라서 안갈기식의 풀이모임은

$$\left\{x \middle| -1 < x < -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\} \cup \left\{x \middle| \frac{2\sqrt{5}}{5} < x < 1\right\}$$

례 7. 안갈기식 $|1-x|^{2x^2-7x+3} < 1\ (x \neq 1)$을 풀어라.

(풀이) 주어진 방정식은

$$\begin{cases} |x-1| < 1 \\ 2x^2 - 7x + 3 > 0 \end{cases} \quad 또는 \quad \begin{cases} |x-1| > 1 \\ 2x^2 - 7x + 3 < 0 \end{cases}$$

으로 변형할수 있다. 즉

$$\begin{cases} 0 < x < 2 \quad (x \neq 1) \\ (2x-1)(x-3) > 0 \end{cases} \quad 또는 \quad \begin{cases} x > 2 \ 또는 \ x < 0 \\ (2x-1)(x-3) < 0 \end{cases}$$

따라서 주어진 안갈기식의 풀이모임은

$$0 < x < \frac{1}{2} \ 또는 \ 2 < x < 3$$

례 8. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$이고 $a + b + c = 1$일 때

1) $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$

2) $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$

임을 증명하여라.

(증명) 1) 왼변$= \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq$

$$\geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ac}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8 = 오른변$$

따라서 안갈기식 $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$이 성립한다.

2) 왼변$= \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$

$$= \sqrt{(4a+1) \cdot 1} + \sqrt{(4b+1) \cdot 1} + \sqrt{(4c+1) \cdot 1} <$$

$$< \frac{4a+1+1}{2} + \frac{4b+1+1}{2} + \frac{4c+1+1}{2}$$

$$= \frac{4(a+b+c)+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 = 오른변$$

따라서 안갈기식 $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$가 성립한다.

례 9． 1） $a>b>0$일 때

$$a+\frac{1}{(a-b)\cdot b}\geq 3$$

임을 증명하여라.

2） $a, b, c\in \mathrm{R}^{+}$일 때

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{3}{2}$$

임을 증명하여라.

（증명） 1） $\text{왼변}=a+\frac{1}{(a-b)\cdot b}=(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)\cdot b}$

$a>b>0$， $a>b$이므로

$$(a-b)>0$$

$$\therefore\ \text{왼변}=(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)\cdot b}\geq 3\sqrt[3]{(a-b)\cdot b\frac{1}{(a-b)\cdot b}}$$

$$=3=\text{오른변}$$

따라서 안같기식

$$a+\frac{1}{(a-b)\cdot b}\geq 3$$

이 성립한다.

2） 안같기식을 변형하여

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq \frac{3}{2}+3$$

이 성립한다는것을 증명하면 된다.

$$\text{왼변}=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(a+b)+(b+c)+(a+c)]\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(a+c)}}$$

$=\frac{9}{2}=$오른변

따라서 안갈기식 $\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1\geq\frac{9}{2}$ 가 성립한다.

즉 주어진 안갈기식 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$ 이 성립한다.

례 10. $0<a<\frac{1}{2}$ 일 때

$$A=1-a^2,\ B=1+a^2,\ C=\frac{1}{1-a}$$

사이의 크기를 비교하고 그 리유를 설명하여라.

(풀이) $0<a<\frac{1}{2}$ 이므로 $1-a^2<1+a^2$ 즉 $A<B$

그리고 $C-B=\frac{1}{1-a}-(1+a)^2=\frac{1-(1+a^2)(1-a)}{1-a}$

$$=\frac{a(a^2-a+1)}{1-a}=\frac{a}{1-a}\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$$

이므로 $C>B$

$\therefore\ A<B<C$

례 11. 1) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$

2) $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<1$

을 증명하여라.

(증명) 1) $\frac{1}{2\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{k}}>2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

왼변 $=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$>2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$=2\left(\sqrt{n+1}-1\right)=\text{오른변}$$

따라서 주어진 안갈기식

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

이 성립한다.

2) $\frac{1}{2n}<\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n}\ (n<k)$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{개}}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

또한 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{개}}=n\cdot\frac{1}{n}=1$

따라서 주어진 안갈기식이 성립한다.

례 12. $a,\ b$가 실수이고 $a^2+b^2=1,\ x^2+y^2=1$일 때

$$|ax+by|\leq 1$$

임을 증명하여라.

(증명) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2$

$$\geq a^2x^2+b^2y^2+2abxy=(ax+by)^2$$

따라서 $|ax+by|\leq 1$이 성립한다.

(다른 방법) $a=\sin\alpha,\ b=\cos\alpha,\ x=\sin\beta,\ y=\cos\beta$ 라고 하면

$$\text{왼변}=|ax+by|=|\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta|$$

$$=|\cos(\alpha-\beta)|\leq 1=\text{오른변}$$

례 13. 안갈기식

$$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{개}}<\sqrt{a}+1\ \ (a>0)$$

을 증명하여라.

(증명) (수학적귀납법)

1) $n=1$일 때 $\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$이 성립한다.

2) $n=k$일 때 안갈기식

$$\sqrt{\underbrace{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}_{k\text{개}}}<\sqrt{a}+1$$

이 성립한다고 하자.

$n=k+1$일 때

$$\sqrt{\underbrace{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{k+1\text{개}}}<\sqrt{\sqrt{a}+1+a}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{a})^2+1\cdot\sqrt{a}+1}<\sqrt{(\sqrt{a}+1)^2}=\sqrt{a}+1$$

즉 $n=k+1$일 때도 안갈기식이 성립한다.

따라서 주어진 안갈기식이 성립한다.

례 14. a, b, c가 정수일 때

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

임을 증명하여라.

(증명) $a+b+c=t$라고 하자.

왼변은

$$a\frac{a}{t-a}+b\frac{b}{t-b}+c\frac{c}{t-c}=a\frac{t}{t-a}+b\frac{t}{t-b}+c\frac{t}{t-c}-t$$

$$=t\left(\frac{t}{t-a}+\frac{t}{t-b}+\frac{t}{t-c}-3\right)-t$$

이때

$$\frac{t}{t-a}+\frac{t}{t-b}+\frac{t}{t-c}\geq 3t\sqrt[3]{\frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}}\geq\frac{9}{2}$$ 이므로

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{t}{2}=\frac{a+b+c}{2}$$

(다른 방법) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}\cdot\frac{b+c}{4}}=a$ ①

같은 방법으로

$$\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4}\geq b \qquad ②$$

$$\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4}\geq c \qquad ③$$

식 ①, ②, ③을 더하면 주어진 안갈기식이 성립한다.

례 15. 부채형의 둘레의 길이가 L이다. 부채형의 중심각이 얼마일 때 면적이 최대로 되겠는가?

(풀이) 부채형의 중심각이 θ이고 반경이 R라고 하면

$$L = 2R + R\theta$$

$$\therefore\ R = \frac{L}{2+\theta}$$

부채형의 면적은

$$S = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2+\theta}\right)^2\theta$$

$$= L^2 \cdot \frac{\theta}{2(2+\theta)} \cdot \frac{1}{2+\theta}$$

그런데 $\dfrac{\theta}{2(2+\theta)} + \dfrac{1}{2+\theta} = \dfrac{\theta+2}{2(2+\theta)} = \dfrac{1}{2}$ 이므로

$$S \le L^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}$$

즉 $\dfrac{\theta}{2(2+\theta)} = \dfrac{1}{2+\theta}$ 일 때 즉 $\theta = -2$ 일 때 부채형의 면적이 최대이다.

즉 $S_{최대} = \dfrac{L^2}{16}$

2) 련습문제

- 선택문제

1. $a < b < 0$ 일 때 옳은것은 (　　)이다.

A. $\sqrt{a} < \sqrt{b}$　　　B. $\dfrac{1}{2^a} < \dfrac{1}{2^b}$

C. $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$　　　D. 이외의것은 옳지 않다.

2. 안갈기식 $\lg x^2 < 10$ 의 풀이모임은 (　　)이다.

A. $\{x|0 < x < 10\}$　　　B. $\{x|x < 10\}$

C. $\{x|-10 < x < 0$ 또는 $0 < x < 10\}$　　　D. $\{x|-10 < x < 10\}$

3. $x \in \mathrm{R}$일 때 $(1-|x|)\cdot(1-x)>0$의 필요충분조건은 ( )이다.

A. $|x|<1$ B. $|x|>1$ C. $x<1$ D. $x>-1,\ x\neq 1$

4. $x \in \left[\frac{1}{9},\ 27\right]$일 때 $f(x)=\log_3 \frac{x}{27}\cdot\log_3 3x$의 최대값은 ( )이다.

A. 12 B. 5 C. −4 D. 3

5. $a,\ b \in \mathrm{R}^-$일 때 다음의 안갈기식이 성립하는것은 ( )이다.

A. $|a+b|<|a-b|$ B. $|a+b|>|a-b|$

C. $|a+b|<|a|-|b|$ D. $|a+b|>|a|-|b|$

6. $x \in \mathrm{R}$에 대하여 다음의 안갈기식이 성립하는것은 ( )이다.

A. $\lg(x^2+1)\geq \lg 2x$ B. $-\frac{\pi}{2}\leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

C. $x^2+4\geq 4$ D. $\frac{1}{x^2+1}<1$

7. 안갈기식 $\frac{(x-1)^2(x+2)^3}{(x-3)(x-4)}\leq 0$의 풀이는 ( )이다.

A. $x\leq -2$ 또는 $3\leq x\leq 4$ B. $x\leq -2$ 또는 $3<x<4$

C. $x<-2$ 또는 $3<x<4$ D. $x\leq -2$ 또는 $3<x<4$ 또는 $x=1$

8. 안갈기식 $ax^2+bx+c<0$의 풀이모임이 $\varnothing$이면 ( )이다.

A. $a>0$이고 $b^2-4ac>0$ B. $a>0$이고 $b^2-4ac<0$

C. $a<0$이고 $b^2-4ac>0$ D. $a<0$이고 $b^2-4ac\leq 0$

− 빈칸채우기문제

9. 3개의 수 $\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{4}},\ \left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{3}{4}},\ \log_{\frac{3}{4}}\frac{5}{4}$의 크기순서는 ____

10. 안갈기식 $ax^2+abx+b>0$의 풀이모임이 $\{x|2<x<3\}$이면

$a=$____, $b=$____

11. 안갈기식 $\left|x^2-\frac{1}{2}\right|>2x$의 풀이모임은 ____

12. $a\geq b>0$이면 $\log_{\frac{1}{\pi}} a+\log_{\frac{1}{a}} b$ ____ $2\log_{\pi}\frac{2}{a+b}$

13. 방정식 $x^2-2x+\lg(2a^2-a)=0$이 하나의 정수풀이와 하나의 실

수풀이를 가지면 실수 a의 값범위는 ____

14. 안갈기식 $\left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_2 x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2^2 x}$ 의 (0, 1)에서의 풀이는 ____

15. $8x^2 + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} = 6$이고 $x < 0,\ y < 0$이면 $x =$____, $y =$____

16. $0 \le x \le 2\pi$일 때 안갈기식 $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$의 풀이모임은 ____

－ 해답문제

17. 안갈기식 $ax + 1 < a^2 + x$를 풀어라.

18. 안갈기식 $\sqrt{\log_2^2 x + \log_2 x - 2} > 2\log_2 x - 2$를 풀어라.

19. $x \in \mathrm{R}$에 대하여 $\lg(ax^2 + 3ax + a + 2)$가 늘 뜻을 가지도록 a의 옹근수풀이를 구하여라.

20. $a > b > c > 0$일 때 $a^a \cdot b^b \cdot c^c > (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$ 임을 증명하여라.

21. $n \in \mathrm{N},\ n > 2$일 때 $\log_n(n-1)\log_n(n+1) < 1$을 증명하여라.

22. $a,\ b,\ c$가 △ABC의 세 변이라고 하면

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{c}{1+c}$$

임을 증명하여라.

23. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$일 때

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} \ge x + y + z$$

임을 증명하여라.

24. $x,\ y,\ z \in \mathrm{R}^+$이고 $x + y + z = 1$이면

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \ge 64$$

라는것을 증명하여라.

3) 자체시험문제

－ 선택문제

1. $|x - y| < 2h$는 $|x - a| < h,\ |y - a| < h$의 (　　)이다.

A. 필요조건　　　　B. 충분조건
C. 필요충분조건　　D. 그외는 아니다.

2. $a,\ b \in \mathrm{R}^{+}$일 때 안갈기식 $a > \frac{1}{x} > -b$ 는 (　)이다.

A. $-\frac{1}{b} < x < 0$ 또는 $0 < x < \frac{1}{a}$　　B. $x < -\frac{1}{b}$ 또는 $x > \frac{1}{a}$

C. $-\frac{1}{a} < x < 0$ 또는 $0 < x < \frac{1}{b}$　　D. $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{b}$

3. 안갈기식 $\lg\frac{1}{2-x} \geq 0$의 풀이모임은 (　)이다.

A. $\{x|1 \leq x < 2\}$　　B. $\{x|1 \leq x \leq 2\}$

C. $\{x|x \geq 1\}$　　D. $\{x|x \neq -2\}$

4. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 이고 $|x-1|\lg\sin\alpha > \lg\sin^2\alpha$ 라고 하면 x 의 값범위는 (　)이다.

A. $x < -1$　　B. $x > 3$

C. $x < -1$ 또는 $x > 3$　　D. $-1 < x < 3$

5. $a,\ b \in \mathrm{R}^{-}$일 때 안갈기식이 성립하는것은 (　)이다.

A. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$　　B. $-2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 0$

C. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq -2$　　D. $0 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq 2$

－ 빈칸채우기문제

6. 안갈기식 $|x+1| - |x-1| > 1$의 풀이모임은 ____이다.

7. 함수 $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$의 뜻구역은 ____이다.

8. 안갈기식 $ax^2 + bx + 2 > 0$ 의 풀이모임이 $\left\{x \middle| -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}\right\}$ 이면 $a =$____, $b =$____이다.

9. 전체모임이 $\mathrm{E} = \mathrm{R}$이고 $\mathrm{A} = \{x|x^2 + 3x + 2 < 0\}$, $\mathrm{B} = \{x|x^2 + 2x = 0\}$이면 $\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} =$____이다.

10. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2^{-1}}$ 일 때 x의 값은 ____이다.

— 해답문제

11. 포물선 $y = x^2 - 2x - 3$이 직선 $y = x + 4$의 아래에 놓이도록 x의 범위를 구하여라.

12. 다음의 x에 관한 안갈기식을 풀어라.

1) $a^x > a^{\frac{1}{x}}\ (a > 0)$

2) $\log_{a^2} x < \log_{x^2} a\ (a > 1)$

13. 함수 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$에 대하여 안갈기식

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\ (x_1,\ x_2\text{은 모두 정수})$$

임을 증명하여라.

14. $3x^2 + 2y^2 = 16$일 때 $x^2 + y^2$의 최대값을 구하여라.

15. x에 대한 안갈기식을 풀어라.

1) $a^{2x} + 1 < a^{x+2} + a^{x-2}\ (a > 0)$

2) $\log_x (x + 1) > \log_{(x+1)} x\ (x > 0,\ x \neq 1)$

6. 수렬과 수학적귀납법

1) 문제풀이방법

례 1. 수렬 $\lg 160$, $\lg 80$, $\lg 40$, $\lg 20$, $\cdots$, $\lg\frac{160}{2^{n-1}}$, $\cdots$이 주어졌을 때

1) 일반마디가 a_n 이라고 하면 $b_n = 10^{a_n}$ 으로 된 수렬 $\{b_n\}$ 은 같은비수렬이라는것을 증명하여라.

2) 수렬 $\{a_n\}$에서 몇개의 마디들의 합이 최대로 되며 최대값은 얼마인가?

3) 수렬 $\{a_n\}$의 n째 마디까지의 합이 부수일 때 최소인 마디의 개수는 몇개인가?

(풀이) 1) $b_n = 10^{a_n}$ 이므로 $b_1 = 160, b_2 = 80, b_3 = 40, b_4 = 20, \cdots$

$$\therefore\ b_n = 160\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad b_{n+1} = 160\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n},$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2}\ (\text{상수})$$

따라서 $\{b_n\}$은 같은비수렬이다.

2) $a_n \ge 0$ 즉 $\lg\left[160\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \ge 0$ 이라고 하자.

$$\frac{160}{2^{n-1}} \ge 1 \Rightarrow 2^{n-1} \le 160 \Rightarrow 2^{n-1} \le 2^7 \Rightarrow n \le 8$$

따라서 $\{a_n\}$에서 8째 마디까지의 합이 최대이며

$$S_8 = 8 + 4\lg 2$$

3) $S_n < 0$ 즉 $\frac{\left[\lg 160\cdot\lg\left(160+\frac{1}{2^n}\right)\right]\cdot n}{2} < 0$ 이라고 하면

$$n\lg 160 + \lg\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{n}{2} < 0$$

$$n\lg 160 - \frac{(n-1)n}{2}\cdot\lg 2 < 0$$

$$n > 9 + \frac{2}{\lg 2} \approx 15.64$$

따라서 $n = 16$ 일 때 $S_n < 0$ 인 최소마디수이다.

례 2. 수렬 $\{a_n\}$ 에서 n 째 마디까지의 합이

$$S_n = an^2 + bn + c \ (a,\ b,\ c \text{ 는 상수})$$

라고 하면 수렬 $\{a_n\}$ 이 같은차수렬이기 위한 필요충분조건은 $c = 0$ 이라는것을 증명하여라.

(풀이) 충분성. $c = 0$ 으로부터 $S_n = an^2 + bn$ 은 같은차수렬이다.

공식

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b & (n = 1) \\ 2an + (b - a) & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$= 2an + (b - a)$$

으로부터

$$a_n - a_{n-1} = 2an + b - a - 2a(n - 1) - b + a = 2a \ (\text{상수})$$

따라서 $\{a_n\}$ 은 같은차수렬이다.

필요성. $\{a_n\}$ 이 같은차수렬이면 $c = 0$ 이다. 공식

$$a_n = \begin{cases} a + b + c & (n = 1) \\ S_n - S_{n-1} = 2an + (b - a) & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$a_1 = a + b + c$$

$$a_2 = 4a + b - a = 3a + b$$

$$a_3 = 5a + b$$

$\{a_n\}$ 은 같은차수렬이므로

$$a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Rightarrow 2a = 2a + c \Rightarrow c = 0$$

따라서 $\{a_n\}$ 이 같은차수렬이기 위한 필요충분조건은 $c = 0$ 이다.

례 3. 4개의 수가 있다. 여기서 첫 3개의 수는 같은비수렬을 이루고 이 수들의 적은 216이다. 뒤로부터 3개의 수는 같은차수렬을 이루며 이 수들의 2제곱의 합은 56이다. 이 4개의 수를 구하여라.

(풀이) 첫 3개의 수는 같은비수렬을 이루고 뒤로부터 3개의 수는

같은차수렬을 이루므로 4개의 수를 각각 $\frac{a}{q}$, a, aq, $2aq-a$로 놓을수 있다. 조건

$$\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=216 \qquad ①$$

$$a^2+a^2q^2+(2aq-a)^2=56 \qquad ②$$

로부터 식 ①에서 $a=6$을 얻어 식 ②에 갈아넣으면 $q_1=\frac{2}{3}$ 또는 $q_2=\frac{2}{15}$를 구한다.

따라서 4개의 수는 9, 6, 4, 2 또는 45, 6, $\frac{4}{5}$, $-\frac{22}{5}$이다.

례 4. 두개의 서로 다른 정수 a, b 사이에 n개의 수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$을 끼워넣었을 때 다음의것을 증명하여라.

1) $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$가 같은차수렬을 이루면

$$\frac{a+b}{2}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

2) $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$가 같은비수렬을 이루면

$$\sqrt{ab}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}$$

(증명) 1) 수렬 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$의 공통차를 d라고 하면

$$x_1=a+d,\ x_2=a+2d,\ \cdots,\ x_n=a+nd$$

$$b=a+(n+1)d$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}[a+a+(n+1)d]=a+\frac{(n+1)}{2}d$$

또한

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{na+(1+2+\cdots+n)d}{n}=$$

$$=\frac{na+\frac{(n+1)n}{2}d}{n}=a+\frac{n+1}{2}d$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{2}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

2) 수렬 $a, x_1, x_2, \cdots, x_n, b$의 공통비를 $q>0$이라고 하면

$$x_1=aq,\ x_2=aq^2,\ \cdots,\ x_n=aq^n, b=aq^{n+1}$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a\cdot aq^{n+1}}=\sqrt{a^2\cdot q^{n+1}}=aq^{\frac{n+1}{2}}$$

그리고 $\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=\sqrt[n]{a^n\cdot q^{1+2+\cdots+n}}$

$$=\sqrt[n]{a^n\cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}}=aq^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\therefore\ \sqrt{ab}=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ \cdots\cdot x_n}$$

례 5. 수렬 $\lg x_1, \lg x_2, \cdots, \lg x_n, \cdots$이 같은차수렬이다. 이 수렬의 m째 마디는 k이고 k째 마디는 $m(k\neq m)$이다. 수렬 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, $\cdots$의 첫 $k+m$째 마디의 합을 구하여라.

(풀이) 같은차수렬의 공통차를 d라고 하면

$$d=\lg x_2-\lg x_1=\lg\frac{x_2}{x_1}$$

조건으로부터 $\lg x_m=k,\ \lg x_k=m$

즉 $\lg x_k=\lg x_1+(k-1)\lg\frac{x_2}{x_1}=m$ ①

$\lg x_m=\lg x_1+(m-1)\lg\frac{x_2}{x_1}=k$ ②

②－①하면

$$k-m=(m-k)\lg\frac{x_2}{x_1}$$

그러면 $d=\lg\frac{x_2}{x_1}=\frac{k-m}{m-k}=-1$

$\therefore\ k=\lg x_1+(m-1)(-1)$

즉 $\lg x_1=k+m-1$

따라서 같은차수렬 $\lg x_1, \lg x_2, \cdots, \lg x_n, \cdots$은 $k+m-1$, $k+m-2$, $k+m-3$, $\cdots$, $k+m-n$, $\cdots$이다.

따라서 수렬 $\{x_n\}$은 $10^{k+m-1}, 10^{k+m-2}, \cdots, 10^{k+m-n}, \cdots$ 이다.

즉 첫마디가 10^{k+m-1}이고 공통비는 10^{-1}인 무한감소수렬이다.

$\therefore\ S_{k+m}=\frac{1}{9}\left(10^{k+m}-1\right)$

례 6. △ABC에서 tanA는 3번째 마디가 －4이고 7번째 마디가 4인 같은차수렬의 공통차이다. tanB는 3번째 마디가 $\frac{1}{3}$이고 6번째 마디가 9인 같은비수렬이다.

1) △ABC는 뾰족3각형이라는것을 증명하여라.

2) 이 3각형의 가장 짧은 변의 길이가 1일 때 최대인 변을 구하여라.

(풀이) 1) 조건 $-4+(7-3)\tan A=4$, $\frac{1}{3}\tan^3 B=9$ 으로부터 풀이는 $\tan A=2,\ \tan B=3$

$\tan C=\tan[\pi-(A+B)]$

$$=-\tan(B+A)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$$

$$=-\frac{2+3}{1-2\times 3}=1$$

$\therefore\ \angle C=45^\circ$

그런데

$\tan A=2>0,\ \tan B=3>0$, $0<A,\ B<180^\circ$

이므로 A, B는 뾰족각이다.

따라서 △ABC는 뾰족3각형이다.

2) 탕겐스함수는 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 증가함수이므로 A, B, $C\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$이고 $\tan C<\tan A<\tan B$

따라서 ∠C는 최소, ∠B는 최대 즉 ∠B에 대응하는 변 b는 최대이다.

또한 $\tan B=3,\ \tan C=1$이므로

$$\sin B=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

시누스정리로부터

$$b = \frac{c \cdot \sin \mathrm{B}}{\sin \mathrm{C}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5}$$

는 가장 큰 변이다.

례 7. 수렬 $\{a_n\}$ 의 첫 n 째 마디까지의 합이 S_n 이고 $a_1 = 1$, $\mathrm{S}_{n+1} = 4a_n + 2 \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라고 하자.

1) $a_{n+1} = 4(a_n - a_{n-1})$ 을 증명하여라.

2) $a_{n+1} > 2a_n$ 을 증명하여라.

(증명) 1) $\mathrm{S}_{n+1} = 4a_n + 2,\ \mathrm{S}_n = 4a_{n-1} + 2$ 로부터

$$a_{n+1} = \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = 4a_n + 2 - 4a_{n-1} - 2$$
$$= 4(a_n - 4a_{n-1})$$

2) $n = 1$일 때

$$a_1 = 1,\ \mathrm{S}_2 = 4a_1 + 2 \Rightarrow a_2 = 5$$

$\therefore\ a_2 > 2a_1$

따라서 안갈기식이 성립한다.

$n = k$ 일 때 안갈기식 $a_{k+1} > 2a_k$ 가 성립한다고 하자.

$n = k + 1$일 때

$a_{k+2} = 4(a_{k+1} - a_k) = 2a_{k+1} + 2(a_{k+1} - 2a_k)$

$\therefore\ a_{k+1} > 2a_k$

$\therefore\ a_{k+1} - 2a_k > 0$

$\therefore\ a_{k+2} > 2a_{k+1}$

즉 $n = k + 1$일 때 안갈기식이 성립한다.

따라서 수학적귀납법으로부터 $n \in \mathrm{N}$ 에 대하여 안갈기식 $a_{k+1} > 2a_n$ 이 성립한다.

례 8. 수렬 $\{a\}$에서 $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = a_1 + a_2 = 2$ 이고

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

로 표시될 때 일반마디공식이

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

이라는것을 증명하여라.

(증명) $n=1$일 때

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]=1$$

$n=2$일 때

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{4}=1$$

$n\le k$일 때 명제가 성립한다고 하자.

$n=k+1$일 때 $a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$

즉 $$a_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 명제는 성립한다.

따라서 수학적귀납법으로부터 주어진 명제가 성립한다.

례 9. $f(x)=x^n$ $(n\in \mathrm{N},\ n>1)$이고 $x_1,\ x_2\ge 0$일 때

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

임을 증명하여라.

(증명) $n=2$일 때

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4}$$

$$\le\frac{x_1^2+x_2^2+x_1^2+x_2^2}{4}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

따라서 안갈기식이 성립한다.

$n=k-1(k\geq 3)$ 일 때 안갈기식이 성립한다고 가정하면 즉

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k-1}\leq\frac{x_1^{k-1}+x_2^{k-2}}{2}$$

그러면 $n=k$ 일 때

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k}=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k-1}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}$$

$$\leq\frac{x_1^{k-1}+x_2^{k-1}}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_1^k+x_2^k+\left(x_1^{k-1}x_2+x_2^{k-1}x_1\right)}{4}$$

$0\leq x_1\leq x_2$ 일 때 $x_1^{k-1}\leq x_2^{k-1}$

$0\leq x_2\leq x_1$ 일 때 $x_1^{k-1}\geq x_2^{k-1}$

$\therefore\ (x_1-x_2)\left(x_1^{k-1}-x_2^{k-1}\right)\geq 0$

그러면 $x_2x_1^{k-1}+x_1x_2^{k-1}\leq x_1^k+x_2^k$

$$\therefore\ \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k}\leq\frac{x_1^k+x_2^k+x_1^k+x_2^k}{4}=\frac{x_1^k+x_2^k}{2}$$

$$=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$n=k$ 일 때에도 안갈기식이 성립한다.

따라서 수학적귀납법으로부터 모든 $n\in\mathrm{N}\ (n>1)$ 에 대하여 주어진 안갈기식이 성립한다.

례 10. 수렬 $\{a_n\}$ 에서 $a_1=\cot x,\ a_n=a_{n-1}\cos x-\sin(n-1)x$ 일 때 일반마디 a_n 의 공식을 구하여라.

(풀이) $a_1=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$$a_2=a_1\cos x-\sin(2-1)x=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\cos x-\sin x$$

$$=\frac{1}{\sin x}(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{\cos 2x}{\sin x}$$

$$a_3=a_2\cos x-\sin(3-1)x=\frac{\cos 2x}{\sin x}\cos x-\sin 2x$$

$$= \frac{1}{\sin x}(\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x) = \frac{\cos 3x}{\sin x}$$

… … … …

$$\therefore \ a_n = \frac{\cos nx}{\sin x}$$

이제 수학적귀납법을 리용하여 $a_n = \dfrac{\cos nx}{\sin x}$ 가 성립한다는것을 증명하자.

(1) $n = 1$일 때

$$a_1 = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(2) $n = k$ 일 때 $a_k = \dfrac{\cos kx}{\sin x}$ 가 성립한다고 가정하자.

$n = k + 1$일 때

$$a_{k+1} = a_k \cos x - \sin[(k+1) - 1]x = \frac{\cos kx}{\sin x} \cdot \cos x - \sin kx$$

$$= \frac{1}{\sin x}[\cos kx \cos x - \sin kx \sin x] = \frac{\cos(k+1)x}{\sin x}$$

따라서 안갈기식이 성립한다.

(1)과 (2)로부터 모든 자연수 n에 대하여 일반마디

$$a_n = \frac{\cos nx}{\sin x}$$

가 성립한다.

례 11. 1보다 큰 임의의 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

을 증명하여라.

(증명) $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ 이라고 하자.

(1) $n = 2$ 일 때 $S_2 = \dfrac{1}{2+1} + \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{7}{12} > \dfrac{13}{24}$

따라서 안갈기식이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 $\mathrm{S}_k > \frac{13}{24}$이라고 하자.

$n=k+1$일 때

$$\mathrm{S}_{k+1}-\mathrm{S}_k=\left[\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\cdots+\frac{1}{2(k+1)}\right]-$$

$$-\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right]$$

$$=-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(k+1)}$$

$$=\frac{1}{2k+1}+\left[\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(k+1)}=\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}>0$$

따라서 $\mathrm{S}_{k+1}>\mathrm{S}_k$ 그리고 $\mathrm{S}_k>\frac{13}{24}$

그러면 $\mathrm{S}_{k+1}>\frac{13}{24}$

따라서 안갈기식이 성립한다.

(1), (2)로부터 $n>1,\ n\in\mathrm{N}$에 대하여 주어진 안갈기식이 성립한다.

례 12. 포물선 $y=\sqrt{x}$와 x축사이에 점차적으로 커지는 내접바른 3각형 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \mathrm{A}_3,\ \cdots$이 있다고 하자. 그러면 3각형 A_n의 둘레의 길이는 l_n, 포물선에 있는 한개 정점은 P_n, x축에 있는 두개의 정점은 Q_{n-1}, Q_n이다. 그리고 Q_0은 원점이고 $\mathrm{L}_n=l_1+l_2+\cdots+l_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$이라고 하면

$$\mathrm{L}_n=\frac{n(n+1)}{3}$$

임을 증명하여라.

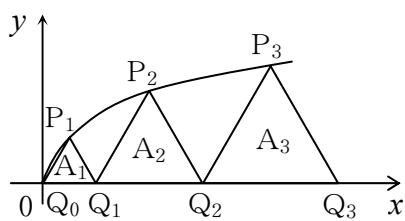



그림 6-1

(증명) (1) $n=1$일 때 OP_1의 방정식은

$$y=\tan\frac{\pi}{3}\cdot x=\sqrt{3}x$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}x \\ y=\sqrt{x} \end{cases}$$

풀이는 $x=\frac{1}{3},\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}$

점 P_1의 자리표는 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$이므로 $OQ_1=\frac{2}{3}=l_1$

바른3각형 A_1의 변의 길이는

$$L_1=\frac{1\times(1+1)}{3}=\frac{2}{3}$$

따라서 명제가 성립한다.

(2) $n=k$일 때 $L_k=\frac{k\times(k+1)}{3}$이 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때

Q_k의 자리표는 (L_k, 0)이고 직선 Q_kP_{k+1}의 방정식은

$$y=\sqrt{3}(x-L_k)=\sqrt{3}\left[x-\frac{k(k+1)}{3}\right]$$

점 P_{k+1}의 자리표는 $(x_{k+1},\ y_{k+1})$이다. 그것은 동시에

$$y=\sqrt{x} \qquad ①$$

$$y=\sqrt{3}\left[x-\frac{k(k+1)}{3}\right] \qquad ②$$

을 만족시켜야 한다.

방정식 ①, ②를 련립시키면

$$x_{k+1}=\frac{(k+1)^2}{3}$$

을 얻는다.

$x_{k+1}=\frac{L_{k+1}+L_k}{2}$이므로

$$\mathrm{L}_{k+1}=2x_{k+1}-\mathrm{L}_k=2\frac{(k+1)^2}{3}-\frac{k(k+1)}{3}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{3}$$

따라서 갈기식이 성립한다.

(1), (2)로부터 모든 자연수 n 에 대하여 늘

$$\mathrm{L}_n=\frac{n(n+1)}{3}$$

이 성립한다.

례 13. 수렬 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 에 대하여 첫 n 째 마디까지의 합이 S_n 이라고 하고 이것과 a_n 의 관계는 $\mathrm{S}_n=-b\cdot a_n+1-\frac{1}{(1+b)^n}$ 로 표시된다. 여기서 b 는 n 에 무관계한 상수이고 $b\neq-1$ 이다.

1) a_n 과 a_{n-1} 의 관계식을 구하여라.

2) n 과 b 를 리용하여 a_n 의 식을 구하여라.

(풀이) 1) $a_n=\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_{n-1}$

$$=-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n}+ba_{n-1}-1+\frac{1}{(1+b)^{n-1}}$$

$$=-b(a_n-a_{n-1})+\frac{b}{(1+b)^n}\ (n\geq 2)$$

이것을 정돈하면

$$a_n=\frac{b}{1+b}a_{n-1}+\frac{b}{(1+b)^{n+1}}\ (n\geq 2) \qquad ①$$

2) $a_1=\mathrm{S}_1=-ba_1+1-\frac{1}{b+1}$ 이므로

$$\therefore\ a_1=\frac{b}{(1+b)^2} \qquad ②$$

식 ①로부터

$$a_2=\frac{b}{1+b}a_1+\frac{b}{(1+b)^3}=\frac{b^2+b}{(1+b)^3}$$

$$a_3 = \frac{b}{1+b}a_2 + \frac{b}{(1+b)^4}$$

$$= \frac{b}{1+b}\cdot\frac{b^2+b}{(1+b)^3} + \frac{b}{(1+b)^4} = \frac{b^3+b^2+b}{(1+b)^4}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{b^n + b^{n-1} + \cdots + b^2 + b}{(1+b)^{n+1}} \qquad ③$$

수학적귀납법을 리용하여 식 ③이 성립한다는것을 증명하자.

(1) $n=1$일 때 $a_1 = \frac{b}{(1+b)^2}$

식 ②로부터 성립한다는것을 알수 있다.

(2) $n=k$일 때 $a_k = \frac{b^k + b^{k-1} + \cdots + b^2 + b}{(1+b)^{k+1}}$

가 성립한다고 가정하면

$n=k+1$일 때

$$a_{k+1} = \frac{b}{1+b}a_k + \frac{b}{(1+b)^{k+2}}$$

$$= \frac{b}{1+b}\cdot\frac{b^k + b^{k-1} + \cdots + b^2 + b}{(1+b)^{k+1}} + \frac{b}{(1+b)^{k+2}}$$

$$= \frac{b^{k+1} + b^k + \cdots + b^3 + b^2 + b}{(1+b)^{k+1}}$$

즉 $n=k+1$일 때 식 ③이 성립한다.

(1), (2)로부터 임의의 $n\in \mathrm{N}$에 대하여 식 ③이 성립한다.

$$a_n = \begin{cases} \frac{1-b^{n+1}}{(1-b)(1+b)^{n+1}} & (b\neq 1) \\ \frac{n}{2^{n+1}} & (b=1) \end{cases}$$

례 14. 수렬 1, 3, 6, …의 첫 n째 마디까지의 합이 n의 3차여러마디식이라고 할 때 수렬의 일반마디공식과 첫 n째 마디까지의 합의 공식을 구하여라.

(풀이) $\mathrm{S}_n = \mathrm{A}n^3 + \mathrm{B}n^2 + \mathrm{C}n + \mathrm{D}$라고 하면

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= A\left[n^3 - (n-1)^3\right] + B\left[n^2 - (n-1)^2\right] + C\left[n - (n-1)\right]$$
$$= 3An^2 + (2B - 2A)n + A - B + C$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 6$ 으로부터

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 7A + 3B + C = 3 \\ 19A + 5B + C = 6 \end{cases}$$

을 얻는다. 풀이는

$$\begin{cases} A = \frac{1}{6} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2n}$$

또한 $S_1 = a_1 = A + B + C + D = 1 \Rightarrow D = 0$

$$\therefore\ S_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

례 15. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 의 합을 구하여라.

(풀이) $a_n = n^2$ 은 n 의 2차식이고 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 S_n 은 n 의 3차여러마디식이다. 즉

$S_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D\ (n = 1, 2, 3, 4)$

$$\begin{cases} A + B + C + D = 1 \\ 8A + 4B + 2C + D = 1 + 4 = 5 \\ 27A + 9B + 3C + D = 1 + 4 + 9 = 14 \\ 64A + 16B + 4C + D = 1 + 4 + 9 + 16 = 30 \end{cases}$$

풀이는 $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = 0$

$$\therefore \ \mathrm{S}_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

례 16. 수렬 $\{a_n\}$에 대하여 6, 9, 14, 21, 30, …이 주어졌을 때 이 수렬의 일반마디공식을 구하여라.

(풀이) 수렬의 특징을 고찰하자. 뒤마디로부터 앞마디를 던 차로 이루어진 수렬 $\{b_n\}$은 3, 5, 7, 9, …으로서 첫 마디가 3이고 공통차가 2인 같은차수렬이다. 그러면 수렬 $\{b_n\}$의 일반마디공식을 구할수 있으며 다시 거꾸로 수렬 $\{a_n\}$의 일반마디공식을 유도할수 있다.

3, 5, 7, 9, …의 일반마디는 $b_n = 2n+1$이므로

$$a_2 - a_1 = b_1 = 3,\ a_3 - a_2 = b_2 = 5,$$

$$a_4 - a_3 = b_3 = 7, \cdots,\ a_n - a_{n-1} = b_{n-1} = 2n-1$$

매 식을 서로 더하면

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}$$

$$= 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2n - 1 = n^2 - 1$$

즉 $a_n = \sum_{i=1}^{n} b_i + a_i = n^2 - 1 + 6 = n^2 + 5$

여기서 $a_n = \sum_{i=1}^{n} b_i + a_i$는 두개 수렬의 관계식으로서 $\{b_n\}$의 일반마디공식으로부터 거꾸로 원래 수렬의 일반마디공식을 유도할수 있다.

례 17. 수렬 1, 4, 11, 26, 57, 120, …의 일반마디공식을 구하여라.

(풀이) 제1계차수렬 $\{b_n\}$은 3, 7, 15, 31, 63, …이고 제2계차수렬 $\{c_n\}$은 4, 8, 16, 32, …이므로 수렬 $\{c_n\}$은 첫 마디가 4, 공통비가 2인 같은비수렬이다.

따라서 일반마디는 $c_n = 4 \cdot 2^{n-1}$

공식으로부터 $b_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_j + b_1 = 2^{n+1} - 1$

$$a_n = \sum_{j=1}^{n-1} b_j + a_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \left(2^{j+1} - 1\right) + 1$$

$$= 2^{n+1} - n - 2$$

따라서 수렬의 일반마디공식은

$$a_n = 2^{n+1} - n - 2$$

2) 련습문제

－ 빈칸채우기문제

1. 같은비수렬 100, 96, 92, 88, …은 ____째 마디로부터 시작하여 매개 마디는 모두 부수이며 ____째 마디는 령이다.

2. 수렬 $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, \frac{16}{17}, \cdots$의 일반마디는 $a_n =$____이다.

3. 5개의 수자 2, x, y, z, 18이 같은비수렬을 이루면 x의 값은 ___이다.

4. $\{a_n\}$이 같은비수렬이면 $\lg a_n$은 ____수렬이며 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 ____수렬이고 $\{a_n^2\}$은 ____수렬이다.

5. 같은차수렬 $\{a_n\}$의 첫 n째 마디까지의 합이 $S_n = 3n^2$이면 $a_5 =$____이다.

6. 수렬이 $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2, \left(4+\frac{1}{4}\right)^2, \cdots, \left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2, \cdots$이면 $S_n =$____이다.

7. n이 4의 배수이면 $1+2i+3i^2+\cdots+(n+1)i^n =$____이다.

8. 수학적귀납법을 리용하여 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1} < n$을 증명하는 과정에 《$n=k$》에서 《$n=k+1$》$(n \in \mathrm{N})$으로 할 때 왼변에 첨가하여야 할 마디는 ____이다.

－ 선택문제

9. 같은차수렬의 첫 $2n+1$째 마디에서 홀수마디의 합과 짝수마디의 합의 비는 (　)이다.

A. $\frac{2n+1}{n}$　　B. $\frac{n+1}{n}$　　C. $\frac{2n+1}{2n}$　　D. $\frac{n+1}{2n}$

10. 매개 마디들이 정수인 같은비수렬에서 임의의 마디가 그뒤의 두개 마디의 합과 같으면 이 공통비는 (　)이다.

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

11. 수렬 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$에서 (　)번째 마디뒤의 모든 마디들과 1과의 차의 절대값이 0보다 작다.

A. 95　　B. 96　　C. 97　　D. 98

12. 같은차수렬에서 m째 마디가 n이고 n째 마디가 m이면 $n+m$째 마디는 (　)이다.

A. $m+n$　　B. mn　　C. $n-m$　　D. 0

13. 수렬 1, $\frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \cdots, \frac{1}{1+2+\cdots+n}$의 첫 n째 마디까지의 합은 (　)이다.

A. $\frac{2n}{2n+1}$　　B. $\frac{n}{2n+1}$　　C. $\frac{2n}{n+1}$　　D. $\frac{2n}{n-1}$

14. 수렬에서 일반마디공식은 다음과 같다.

① $a_n = (n+2)^2 - (n-2)^2$　　② $a_n = \lg 2^n$

③ $a_n = 2^{\log_2 n}$　　④ $a_n = \sqrt{n^2+4n+4}\ (n \in \mathrm{N})$

여기서 같은비수렬의 개수는 (　)이다.

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

ㅡ 해답문제

15. $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$가 주어졌다. 수렬 1, $z, z^2, z^3, \cdots, z^n, \cdots$의 첫 182째 마디까지의 합과 적을 구하여라.

16. 수렬 $\lg 1000, \lg(1000\sin 30°), \cdots, \lg(1000\sin^{n-1} 30°), \cdots$에 대하여 몇개의 마디들의 합이 최대이고 최대값은 얼마인가를 구하여라.

17. 평면에 n개의 원이 있다. 여기서 매개 두개의 원은 서로 다른 두 점에서 사귀고 매개 세개의 원은 한 점에서 사귀지 않는다. 이 n개의 원은 평면을 $f(n) = n^2 - n + 2$ 개의 부분으로 가른다는것을 증명하여라.

18. 수렬 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = 1,\ S_n = n^2 \cdot a_n$일 때 a_n과 S_n을 구하여라.

19. n은 자연수이고 포물선의 방정식이 $y = n(n+2)x^2 - 2(n+1)x + 1$일 때

1) 포물선의 정점들은 모두 한개의 쌍곡선에 놓인다는것을 증명하여라.

2) $n = 1, 2, 3, \cdots$일 때 포물선이 x축에서 선분토막들로 자른 길

이의 총합을 구하여라.

20. 수렬 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} \cdot a_n - 2a_n + 1 = 0$일 때

1) a_1a_2, $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_3a_4$의 값을 구하여라.

2) $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$의 값을 구하는 공식을 찾고 수학적귀납법을 리용하여 증명하여라.

3) 자체시험문제

– 빈칸채우기문제

1. 수렬이 $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{11}{17}$, $\frac{15}{23}$, $\cdots$이라고 하면 $a_n =$____이다.

2. $\lg 2,\ \lg(2^x - 1),\ \lg(2^x + 3)$이 같은비수렬을 이루면 $x =$____이다.

3. 수렬의 일반마디가 $a_n = n(n+2)$라고 하면

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots = ____$$ 이다.

4. 같은비수렬 $\{a_n\}$에서 a_1과 a_{10}이 방정식 $2x^2 + 4x + 1 = 0$의 두개의 풀이이면 $a_4 \cdot a_7 =$____이다.

5. $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$____이다.

6. 수렬 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + n$이면 수렬 $\{a_n\}$의 일반마디공식은 ____이다.

– 선택문제

7. 수학적귀납법을 리용하여

$$《1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}》$$

을 증명하는 과정에 $n = 1$일 때 갈기식의 왼변과 오른변의 식은 각각 (　　)이다.

A. $1,\ \frac{1}{1+1}$　　B. $1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{1+1}$

C. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2}$　　D. $1,\ \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2}$

8. 같은차수렬 $\{a_n\}$에서 $a_6 + a_{15} = 15$라고 하면 S_{20}은 (　　)이다.

A. 100　　B. 120　　C. 140　　D. 150

9. 수렬 $\{a_n\}$의 일반마디가 $a_n = 2n-13$이라고 하면 가장 작은 S_n은 (　)이다.

A. S_1　　B. S_4　　C. S_6　　D. S_{10}

10. 수렬 1, 1+2, $1+2+2^2$, …, $1+2+2^2+2^3+ \cdots +2^{n-1}$의 첫 n째 마디의 합은 (　)과 같다.

A. 2^n　　B. $2^{n+1}-n$　　C. 2^n-n　　D. $2^{n+1}-n-2$

11. a, b, c가 같은차수렬을 이루고 $a+1, b, c$와 $a, b, c+2$가 같은비수렬을 이룬다면 b의 값은 (　)이다.

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

12. 한개의 같은비수렬과 첫 마디가 0인 같은차수렬이 있다. 대응하는 마디끼리 서로 더하여 새로운 수렬 1, 1, 2, …을 얻으면 이 수렬의 첫 10째까지의 마디의 합은 (　)이다.

A. 978　　B. 468　　C. 558　　D. 1 068

ㅡ 해답문제

13. n은 자연수이고 $0 < x \le \frac{\pi}{4}$일 때 $\cot\frac{x}{2^n} - \cot x \ge n$을 증명하여라.

14. $y = f(x)$는 1차함수이다. 그리고 $f(8)=15$이고 $f(2)$, $f(5)$, $f(4)$가 같은비수렬일 때

$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

을 구하여라.

15. $\{a_n\}$이 같은차수렬이고 공통차가 0이 아니며

$$a_k x^2 + 2a_{k+1}x + a_{k+2} = 0 \ (k \in \mathrm{N})$$

이라고 할 때

1) k가 서로 다른 자연수값을 가질 때 방정식이 하나의 같은 풀이를 가진다는것을 증명하여라.

2) $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 가 방정식의 서로 다른 풀이들이라고 할 때 $\frac{1}{a_1+1}, \frac{1}{a_2+1}, \cdots, \frac{1}{a_k+1}$은 같은차수렬을 이룬다는것을 증명하여라.

16. $f(1)=0$이고 $af(n)-bf(n-1)=1 \ (n \in \mathrm{N})$이며 $|a|>|b|>0$이라고 하자.

1) $f(3)$, $f(4)$를 구하여라.

2) $f(n)$의 표시식을 구하고 수학적귀납법을 리용하여 증명하여라.

7. 복소수

1) 문제풀이방법

례 1. m이 어떤 실수일 때 $(m^2-3m+m^2i)-[4+(5m+6)i]$의 값이
1) 실수　　2) 순허수　　3) 0
이겠는가?

(풀이) (주어진 식)$=(m^2-3m-4)-(m^2-5m-6)i$
$=(m+1)(m-4)+(m+1)(m-6)i$

1) $m=-1$ 또는 $m=6$일 때 주어진 식은 실수이다.
2) $m=4$일 때 주어진 식은 순허수이다.
3) $m=-1$일 때 주어진 식은 령이다.

례 2. 다음의 명제들가운데서 정확한것과 정확하지 않은것을 지적하여라.

1) a, b, c가 복소수이고 $a^2+b^2>c^2$이면

$$a^2+b^2-c^2>0$$

2) a, b, c가 복소수이고 $a^2+b^2-c^2>0$이면

$$a^2+b^2>c^2$$

(풀이) $a^2+b^2>c^2$으로부터 a^2+b^2과 c^2은 다 실수이며

$$a^2+b^2-c^2>0$$

따라서 명제 1)이 성립한다.

한편 $a^2+b^2-c^2>0$ 으로부터 $a^2+b^2-c^2>0$ 은 실수이지만 a^2+b^2과 c는 다 실수라고 말할수 없다.

실례로 $a=2+i,\ b=i,\ c=\sqrt{2}(1+i)$로 놓으면

$$a^2+b^2-c^2=(3+4i)+(-1)-4i=2>0$$

이지만 $a^2+b^2=2+4i,\ c^2=4i$는 다 복소수이다.

따라서 $a^2+b^2>c^2$은 성립하지 않으며 명제 2)는 성립하지 않는다.

례 3. $\left|\dfrac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(\sqrt{3}-i)\sqrt{5}i}\right|+2i$의 절대값을 구하여라.

(풀이) 주어진 식 $=\left|\dfrac{(3+4i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(\sqrt{3}-i)\sqrt{5}i}\right|+2i$

$$=\frac{5\times 2}{1\times 2\times\sqrt{5}}+2i=\sqrt{5}+2i$$

따라서 절대값은 $\sqrt{5+4}=3$ 이다.

례 4. 복소수 $z=1-\cos\theta+i\sin\theta\left(0<\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 를 삼각형식으로 표시하고 그 절대값과 편각의 엄지값을 구하여라.

(풀이) $z=1-\cos\theta+i\sin\theta$

$$=2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

한편 $0<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $0<\dfrac{\theta}{2}\le\dfrac{\pi}{4}$ 즉 $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$

$$\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{2}$$

따라서 $|z|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

례 5. p, q 는 다 옹근수이고 $a=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ 가 주어졌을 때 $p+qa$ 의 점들은 복소수평면에서 원의 중심에 원점이 있는 단위원둘레에 놓인다. 이 점들을 표시하는 복소수를 구하여라.

(풀이) $|p+qa|^2=\left|p+q\cos\dfrac{2\pi}{5}+iq\sin\dfrac{2\pi}{5}\right|^2$

$$=\left(p+q\cos\frac{2\pi}{5}\right)^2+\left(q\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2$$

$$=p^2+2pq\cos\frac{2\pi}{5}+q^2\cos^2\frac{2\pi}{5}+q^2\sin^2\frac{2\pi}{5}$$

$$=p^2+2pq\cos\frac{2\pi}{5}+q^2=1$$

그런데 $pq\cos\frac{2\pi}{5}$는 무리수이고 p, q는 옹근수이므로

$$\begin{cases} pq=0 \\ p^2+q^2=1 \end{cases}$$

따라서 $\begin{cases} p=0 \\ q=\pm1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} p=\pm1 \\ q=0 \end{cases}$

그러므로 조건을 만족시키는 복소수는

$$1,\ -1,\ \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5},\ -\cos\frac{2\pi}{5},\ -i\sin\frac{2\pi}{5}$$

례 6. 복소수 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$일 때 다음것을 증명하여라.

1) $|z_1+z_2+z_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$

2) $|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|=|z_1+z_2+z_3|$

(증명) 조건 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$로부터 반드시

$$z_1=\frac{1}{z_1},\ z_2=\frac{1}{z_2},\ z_3=\frac{1}{z_3}$$

이여야 한다.

1) 왼변$=|z_1+z_2+z_3|=|\overline{z_1+z_2+z_3}|$

$$=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=\text{오른변}$$

2) 왼변$=|z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3|$

$$\left|z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)\right|=|z_1z_2z_3|\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|$$

$$=|z_1+z_2+z_3|=\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=|z_1+z_2+z_3|=\text{오른변}$$

례 7. $|z_1|<1,\ |z_2|<1$ 일 때 $\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|<1$ 임을 증명하여라.

(풀이) $\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|<1$ 이 성립한다는것을 증명하기 위하여

$$|z_1-z_2|^2<|1-z_1z_2|^2$$

이 성립한다는것을 증명한다.

$$|1-\bar{z}_1z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-\bar{z}_1z_2)\left(\overline{1-\bar{z}_1z_2}\right)-(z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)$$

$$=(1-\bar{z}_1z_2)(1-z_1\bar{z}_2)-(z_1-z_2)\left(\overline{z_1-z_2}\right)$$

$$=1-\bar{z}_1z_2-z_1\bar{z}_2+z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_2-z_1\bar{z}_1+\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_2$$

$$=1+|z_1|^2\cdot|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2>0$$

즉 $\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|<1$

례 8. 1의 3차뿌리를 구하여라.

(풀이) 1의 3차뿌리를 x 라고 하면 $x^3=1$

$1=\cos 0+i\sin 0$ 이므로

$$x=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\ (k=0,1,\ 2)$$

따라서 $x_1=1$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

례 9. 다음 식들을 계산하여라.

1) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n\ (n\in \mathrm{N})$

2) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n \ (n \in \mathrm{N})$

(풀이) $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 라고 하면

$w^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $w^3 = 1$

1) 주어진 식 $= w^n + w^{-n} = \begin{cases} 2 & (n = 3k) \\ -1 & (n = 3k+1) \\ -1 & (n = 3k+2) \end{cases}$

따라서 n 이 3의 옹근수배수일 때 주어진 식은 2이고 3의 배수가 아닐 때에는 -1이다.

2) 두가지 경우로 갈라 고찰하자.

(1) $n\,(n = 2k)$ 이 짝수인 경우

주어진 식 $= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-k} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2k} = i^k + (-1)^k$

$$= \begin{cases} 2 & (k = 4m) \\ 0 & (k = 4m+1) \\ -2 & (k = 4m+2) \\ 0 & (k = 4m+3) \end{cases}$$

(2) n 이 홀수 즉 $n = 2k+1$ 인 경우

주어진 식은

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2k+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot i^k + \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot (-1)^k$$

$$= \begin{cases} \sqrt{2} & (k = 4m) \\ -\sqrt{2} & (k = 4m+1) \\ -\sqrt{2} & (k = 4m+2) \\ \sqrt{2} & (k = 4m+3) \end{cases}$$

즉 n 이 짝수일 때 주어진 식은 ± 2 또는 0이다.

n 이 홀수일 때 주어진 식은 $\pm\sqrt{2}$ 이다.

례 10. O는 복소수평면의 원점이고 서로 다른 두 점 P, Q가 각각 복소수 z_1, z_2를 표시한다. 이때 $4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$이라고 하면 3각형 POQ의 형태를 판단하여라.

(풀이) $4z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=0$이므로

$$4\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-2\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+1=0$$

즉 $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{2\pm\sqrt{12}i}{8}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$

따라서 $z_1=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$, $z_2=\frac{1}{2}(\cos 60°\pm i\sin 60°)$

즉 OP가 OQ로부터 원점 O주위로 시계바늘이 도는 방향과 반대로 60° 돌고 절대값이 원래의 절반으로 축소하여 얻은 것이다.

따라서 △POQ는 직3각형이다.

례 11. 복소수 z가 $(z+1)^{2n}+(z-1)^{2n}=0$ ($n\in\mathrm{N}$)을 만족한다고 할 때 z가 반드시 순허수라는것을 증명하여라.

(증명) $(z+1)^{2n}+(z-1)^{2n}=0$

$$(z+1)^{2n}=-(z-1)^{2n}$$

즉 $|z+1|^{2n}=|z-1|^{2n}\Rightarrow|z+1|^2=|z-1|^2\Rightarrow$

$$(z+1)(\overline{z+1})=(z-1)(\overline{z-1})\Rightarrow$$

$$(z+1)(\bar{z}+1)=(z-1)(\bar{z}-1)\Rightarrow$$

$$2(z+\bar{z})=0\Rightarrow\mathrm{Re}(z=0)$$

그러나 $z\neq0$이므로 z는 순허수이다.

(다른 증명) 첫 방법으로부터 $|z+1|=|z-1|$, $z=a+bi$라고 하자.

웃식에 갈아넣으면

$$\sqrt{(a+1)^2+b}=\sqrt{(a+1)^2+b}\Rightarrow a=0,\ z=bi$$

또한 $a=0$이면 $z=0$, $(z+1)^{2n}+(z-1)^{2n}=2\neq0$

따라서 $a=0$이고 $b\neq0$ 즉 z는 순허수이다.

례 12. 복소수모임에서 다음 여러마디식을 인수분해하여라.

1) $x^4+x^2y^2+y^4$

2) $x^2+4x\sin\theta+4$

(풀이) 1) 주어진 식 =

$$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2$$
$$=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)$$
$$=\left(x-\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}y\right)$$

이므로

$$\left(x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}y\right)$$

로 인수분해된다.

2) 주어진 식 $=x^2+4x\sin\theta+4$

$$=x^2+4x\sin\theta+4\sin^2\theta+4\cos^2\theta$$
$$=\left(x+2\sin\theta\right)^2-\left(2i\cos\theta\right)^2$$
$$=\left(x+2\sin\theta+2i\cos\theta\right)\left(x+2\sin\theta-2i\cos\theta\right)$$

례 13. c, d 가 실수이고 방정식 $x^3-5x^2+cx+d=0$ 의 한개의 풀이는 $2-3i$ 일 때 c, d 의 값을 구하고 방정식을 풀어라.

(풀이) 실결수한변수 n 차방정식에 대하여 복소수 $a+bi$ 가 방정식의 풀이이면 이것은 공액복소수 $a-bi$ 도 이 방정식의 풀이이다. (허수풀이의 쌍대정리)

$2-3i$ 가 방정식의 한 풀이이므로 방정식에 갈아넣으면

$$(2-3i)^3-5(2-3i)^2+c(2-3i)+d=0$$

즉 $(-21+2c+d)+(51-3c)i=0$

따라서 $\begin{cases}-21+2c+d=0\\51-3c=0\end{cases}$

풀이는 $\begin{cases}c=17\\d=-13\end{cases}$ 이다.

또한 $2-3i$ 가 방정식의 한 풀이이므로 $2+3i$ 는 이 방정식의 다른 풀이이다.

$x^3-5x^2+17x-13=0$ 을 $[x-(2+3i)][x-(2-3i)]$ 로 나누면 상은 $x-1$ 이고 나머지는 0이다. 따라서 방정식의 풀이

는 $2-3i$, $2+3i$, 1이다.

례 14. $z|z|+az+i=0\ (a\geq 0)$일 때 복소수 z를 구하여라.

(풀이) 방정식으로부터 $z\neq 0$이다. 그렇지 않으면 방정식은 성립하지 않는다.

방정식을 $z=\dfrac{-i}{|z|+a}$로 변형하면 $a\geq 0$이므로 $z=yi\ (y<0)$

이라고 하고 주어진 방정식에 갈아넣으면

$$yi|y|+ayi+i=0$$

$$-y^2+ay+1=0$$

$$y_{1,\,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$$

여기서 $y<0$이므로 《＋》기호를 없애면

$$y=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2},\quad z=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}i$$

례 15. $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}+$
$+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\geq 2\sqrt{2}$를 증명하여라.

(풀이) 왼변$=|x+yi|+|(1-x)+yi|+|x+(1-y)i|+|(x-1)+(1-y)i|$

$|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\geq|\mathrm{A}+\mathrm{B}|$이므로

왼변$\geq|x+(-x)+2yi|+|[x+(1-x)]+[(1-y)+(1-y)i]|$

$=|1+2yi|+|[1+(2-2y)i]|$

$\geq|1+2yi|+|[1(1+1)+(2y+2-2y)i]|$

$=|2+2i|=2\sqrt{2}$

례 16. 복소수수렬 $\{z_n\}$의 매개 마디의 절대값은 정의 실수 r이고 z_n의 편각은 θ_n이라고 할 때 $\{\theta_n\}$은 같은차수렬이고 그 공통차는 $d\ (0<d<2\pi)$이다.

1) 수렬 $\{z_n\}$의 첫 200번째 마디까지의 합이 $S_{200}=0$일 때 공통차 d의 모든 가능한 값들을 구하여라.

2) 1)의 모든 가능한 값 d에 대하여 $|z_1-z_2|$의 최소값을

구하여라.

(풀이) 1) $\theta_n = \theta_1 + (n-1)d \ (n=1, 2, \cdots)$이므로

$$z_n = r(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$
$$= r(\cos[\theta_1 + (n-1)d] + i\sin[\theta_1 + (n-1)d])$$
$$= r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[\cos(n-1)d + i\sin(n-1)d]$$
$$= r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos d + i\sin d)^{n-1}$$

즉 $\{z_n\}$은 첫마디가 $z_1 = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$이고 공통비가 $q = \cos d + i\sin d$인 같은비수렬이다. 따라서

$$S_{200} = \frac{r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\left[1-(\cos d + i\sin d)^{200}\right]}{1-(\cos d + i\sin d)} = 0$$

그러므로

$$1-(\cos 200d + i\sin 200d) = 0 \Rightarrow \cos 200d = 1$$
$$\Rightarrow 200d = 2k\pi \Rightarrow d = \frac{k\pi}{100} \ (k \in Z)$$

그런데 $0 < d < 2\pi$이므로 $0 < k < 200$

따라서 d의 모든 가능한 값들은

$$d = \frac{k\pi}{100} \ (k = 1, \ 2, \cdots, 199)$$

2) 주어진 식 $= |z_1 - z_2| =$

$$= |r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) - r[\cos(\theta_1 + d) + i\sin(\theta_1 + d)]|$$
$$= |r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)[1-(\cos d + i\sin d)]|$$
$$= r\sqrt{(1-\cos d)^2 + \sin^2 d}$$
$$= r\sqrt{2\times 2\sin^2\frac{d}{2}}$$
$$= 2r\left|\sin\frac{k\pi}{200}\right|$$

따라서 $k=1$ 또는 $k=199$일 때

$$|z_1 - z_2|_{\min} = 2r\sin\frac{\pi}{200}$$

례 17. 복소수 z_1, z_2, z_3의 편각들이 각각 α, β, γ이고

$$|z_1|=1,\ |z_2|=k,\ |z_3|=2-k,\ z_1+z_2+z_3=0$$

이라고 하자. k가 어떤 값일 때 $\cos(\beta-\gamma)$는 최대값과 최소값을 취할수 있는가? 이때 최대값과 최소값을 구하여라.

(풀이) $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$

$$z_2=k(\cos\beta+i\sin\beta)$$

$$z_3=(2-k)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$$

그런데 $z_1+z_2+z_3=0$이므로

$$\begin{cases}\cos\alpha+k\cos\beta+(2-k)\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+k\sin\beta+(2-k)\sin\gamma=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=(k-2)\cos\gamma-k\cos\beta & ①\\ c\sin\alpha=(k-2)\sin\gamma-k\sin\beta & ②\end{cases}$$

$①^2+②^2$하면

$$1=(k-2)^2\cos^2\gamma+k^2\cos^2\beta-2k(k-2)\cos\beta\cos\gamma$$
$$+(k-2)^2\sin^2\gamma+k^2\sin^2\beta-2k(k-2)\sin\beta\sin\gamma$$
$$=(k-2)^2+k^2-2k(k-2)(\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)$$
$$=(k-2)^2+k^2-2k(k-2)\cos(\beta-\alpha)$$
$$\Rightarrow\cos(\beta-\gamma)=\frac{(k-2)^2+k^2-1}{2k(k-2)}$$
$$=\frac{k^2-4k+3}{2k(k-2)}=1+\frac{3}{2k(k-2)}$$

그런데 $|\cos(\beta-\gamma)|\le 1$이므로

$$\left|1+\frac{3}{2k(k-2)}\right|\le 1$$

즉 $2\le\dfrac{3}{2k(k-2)}<0$

따라서 $\dfrac{1}{2}\le k\le\dfrac{3}{2}$

따라서 $\cos(\beta-\gamma)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & (k=1\text{일 때 최대}) \\ -1 & \left(k=\frac{1}{2}\text{일 때 최소}\right)\end{cases}$

례 18. 복소수 z 가 $|z|=1$ 의 조건밑에서 움직인다고 할 때 $|z^3-3z-2|$ 의 최대값과 최소값을 구하여라.

(풀이) $z=x+yi$ 라고 하자. 여기서 $x^2+y^2=1$

$$|z^3-3z-2|=|(z+1)^2(z-2)|=|z+1|^2\cdot|z-2|$$

$$|z+1|^2=(x+1)^2+y^2=x^2+y^2+2x+1=2+2x \quad ①$$

$$|z-2|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{5-4x} \quad ②$$

조건 $x^2+y^2=1\ (-1\le x\le 1)$ 이 주어져있으므로 식 ①, ② 는 령보다 크다.

세 수의 산수평균과 기하평균의 관계식을 리용하면

$$(2x+2)+(2x+2)+(5-4x)\ge 3\sqrt[3]{(2x+2)^2(5-4x)}$$

$$3^3\ge(2x+2)^2(5-4x)$$

따라서 $3\sqrt{3}\ge\sqrt{(2x+2)^2(5-4x)}$

같기기호는 $2x+2=5-4x$ 일 때 성립한다.

이로부터 풀이는 $x=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2=1$ 로부터 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

이로부터 $z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 일 때 $|z^3-3z-2|$ 는 최대값 $3\sqrt{3}$ 을 가진다.

$x=-1,\ y=0$ 일 때 $|z^3-3z-2|$ 는 최대값 0을 가진다.

례 19. 점 P(a,b)는 복소수 z 에 대응하고 점 Q(x,y)는 복소수 $2z+3-4i$ 에 대응한다. 만일 점 P가 곡선 $|z|=1$ 에서 이동할 때 점 Q의 자리길방정식을 구하여라.

(풀이) 주어진 조건으로부터 $z=a+bi$

$$x+yi=2(a+bi)+3-4i$$
$$=(2a+3)+(2b-4)i$$

$$\begin{cases} x=2a+3 \\ y=2b-4 \end{cases} \text{ 즉 } \begin{cases} a=\dfrac{x-3}{2} \\ b=\dfrac{y+4}{2} \end{cases}$$

점 P(a, b)는 곡선 $|z|=1$에서 이동하기때문에

$$a^2+b^2=1 \text{ 즉 } \left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\left(\frac{y+4}{2}\right)^2=1$$

점 Q의 자리길방정식은 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$이다.

례 20. 복소수 z는 $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=1$을 만족한다. z의 절대값은 r이고 편각은 θ이다.

1) θ가 취할수 있는 값범위를 구하여라.

2) r가 취할수 있는 값범위를 구하여라.

(풀이) 1) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$이면

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

그런데 $\left|z+\dfrac{1}{z}\right|=1$이므로

$$\left|r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\right|=1$$

이로부터

$$\left(r\cos\theta+\frac{1}{r}\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta-\frac{1}{r}\sin\theta\right)^2=1$$

이므로

$$r^2+\frac{1}{r^2}+2\cos 2\theta=1$$

따라서 $2\cos 2\theta=1-\left(r^2+\dfrac{1}{r^2}\right)\le 1-2=-1$

$$-1 \le \cos 2\theta \le -\frac{1}{2}$$

따라서 $2k\pi + \frac{2\pi}{3} \le 2\theta \le 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$

$$k\pi + \frac{\pi}{3} \le \theta \le k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

2) $r^2 + \frac{1}{r^2} = 1 - \cos 2\theta$

$$-1 \le 1 - \cos 2\theta \le 3, \quad r^2 + \frac{1}{r^2} \ge 2$$

이므로

$$2 \le r^2 + \frac{1}{r^2} \le 3$$

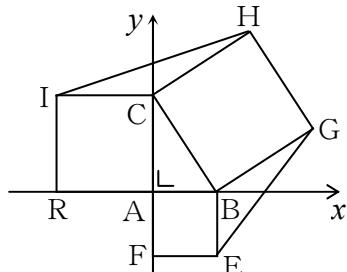
그런데 $r^2 + \frac{1}{r^2} \ge 2$ 는 늘 성립하므로 $r^2 + \frac{1}{r^2} \le 3$ 을 만족하면 풀이는

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \le r \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

레 21. 그림 7-1에서 보여주는것처럼 △ABC에서 각 A는 직각이고 매개 변의 밖으로 바른4각형 BAFE, CBGH, ACIR를 만들고 EG와 IH를 맺으면 $EG^2 + HI^2 = 5BC^2$임을 증명하여라.

그림 7－1

(풀이) A는 복소수평면의 원점이고 AB, AC는 각각 실축과 허축의 정방향이다.

$z_B = b,\ z_C = ci$ 라고 하면

$$z_E = \sqrt{2}b[\cos(-45°) + i\sin(-45°)] = b - bi$$

$$z_I = \sqrt{2}c_i(\cos 45° + i\sin 45°) = -c + ci$$

$$z_G = b + (ci - b)(-i) = b + c + bi$$

$$z_H = ci + (b - ci)i = c + (b + c)i$$

$$EG^2 + HI^2 = |z_G - z_E|^2 + |z_I - z_H|^2$$

$$=|b+c+bi-b+bi|^2+|c+(b+c)i+c-ci|^2$$
$$=|c+2bi|^2+|2c+bi|^2=c^2+4b^2+4c^2+b^2$$
$$=5(c^2+b^2)=5\text{BC}^2$$

따라서 $\text{EG}^2+\text{HI}^2=5\text{BC}^2$이다.

2) 련습문제

－ 선택문제

1. $z=a+bi\ (a,\ b\in\text{R}),\ r=\sqrt{a^2+b^2},\ \theta=\arg z$ 이고 점 $(a,\ b)$가 4사분구에 있다면 ( )이다.

   A. $\theta=\arcsin\frac{b}{r}$　　B. $\theta=\arccos\frac{a}{r}$

   C. $\theta=\arctan\frac{b}{a}$　　D. $\theta=\pi-\arccos\frac{a}{r}$

2. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 는 0 아닌 복소수 z 의 삼각형식이라고 하면 $\frac{1}{z}$ 의 삼각형식은 ( )이다.

   A. $\frac{1}{r}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$　　B. $\frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$

   C. $r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$　　D. 우의 답이 아니다.

3. 공액인 두 복소수의 차는 ( )이다.

   A. 허수 또는 순허수가 아니다.　　B. 순허수

   C. 0　　D. 순허수 또는 0

4. $2|z|-3z=1-12i$ 라고 하면 z 는 ( )이다.

   A. $-1+12i$　　B. $-\frac{1}{5}+\frac{12}{5}i$

   C. $3+4i$ 또는 $-\frac{2}{5}+4i$　　D. $3+4i$

5. 점 z 가 실축과 허축에서 움직인다면 $u=z^2+1+2i$ 의 복소수평면에서의 자리길은 ( )이다.

   A. 직선　　B. 두 평행직선

   C. 두개의 서로 다른 수직인 직선

   D. 서로 사귀는 두개의 포물선

— **빈칸채우기문제**

6. $\left[i^{100}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5\right]^8=$____

7. 복소수 $z=1-\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}$ 의 편각의 엄지각은 ____이다.

8. $z=\left(\frac{3}{3+\sqrt{3}i}\right)^n$ 이 주어졌다. $z\in\mathrm{R}$ 이면 최소의 정의 옹근수 $n=$____

9. $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ 이면 $\left|z+2z^2+3z^3+\cdots+12z^{12}\right|=$____

10. $|z|=1$ 이라고 하면 $\left|\sqrt{3}-i-z\right|$ 의 최대값은 ___이고 최소값은 ___이다.

11. 방정식 $x^3+ax+b=0\ (a,\ b\in\mathrm{R})$ 가 주어졌다고 하자. 한 풀이가 1일 때 $a,\ b$ 의 관계는 ___이다. 또한 이 방정식의 다른 두개의 풀이가 허수풀이일 때 a 가 취하는 값범위는 ___이다.

— **해답문제**

12. $n\in\mathrm{N}$ 이고 $(1+i)^n$ 이
   1) 실수 2) 순허수
   라고 하면 n 의 최소값은 얼마인가? 또한 대응하는 수는 무엇인가?

13. OABCDE가 복소수평면의 바른6각형이고 정점 A에 대응하는 복소수는 $2+2i$ 라고 하자. 정점 D에 대응하는 복소수를 구하여라.

14. 복소수범위에서 방정식 $x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2}=4$ 를 풀어라.

15. $|z|=1$ 이고 $z\neq\pm1$ 이라고 할 때 $\frac{z-1}{z+1}$ 은 순허수이라는것을 증명하여라.

16. $z=a+bi\ (b\neq 0)$ 이라고 할 때 $\frac{z^2+n^2}{z}\ (n>0)$ 이 실수이기 위한 필요충분조건은 $|z|=n$ 이라는것을 증명하여라.

17. $z_1=1+\cos 2(1+a)+i\sin 2(1+a)$
   $z_2=1-\cos 2(1-a)+i\sin 2(1-a)$
   이고 $0<a<\frac{1}{2}$ 이라고 할 때 $|z_1|,\ |z_2|$ 의 크기를 비교하여라.

18. $\{z_n\}$은 같은비수렬이다. 즉 $z_1 = 1$, $z_2 = a + bi$, $z_3 = b + ai\ (a > 0)$

1) z_n 을 구하여라.

2) 첫 100번째까지의 마디들가운데서 몇개의 마디가 순허수인가? 그의 합을 구하여라.

19. 복소수 z는 다음 조건들을 만족시킨다.

(1) 절대값은 a와 같다.

(2) 실수부와 허수부의 적과 합은 서로 같다.

이때 다음 물음에 대답하여라.

1) 조건 (1)은 무슨 곡선을 표시하는가? 그리고 그림을 그려라.

2) 조건 (2)는 무슨 곡선을 표시하는가? 그리고 그림을 그려라.

20. 복소수를 리용하여 $\cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{7}$의 값을 구하여라.

21. 복소수 $z_1 = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $z_2 = 3(\cos\beta + i\sin\beta)$가 주어져있고 $z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 = 7$ 을 만족한다. z_1 은 복소수평면에서 점 A에 대응하고 z_2는 복소수평면에서 점 B에 대응하고 점 O는 자리표원점이라고 할 때 △OAB의 면적을 구하여라.

3) 자체시험문제

- 빈칸채우기문제

1. 복소수 $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$의 절대값은 ____이다.

2. $\left(\frac{-2\sqrt{3}+i}{1+2\sqrt{3}i}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{1988}$ =____

3. A= $\{z \mid |z| = 2,\ z \in C\}$, B= $\{z \mid |z-2| = 2,\ z \in C\}$일 때 A∩B=____

4. 방정식 $|z| - i + 2i^{99} = 1 + z$ 의 풀이는 ____이다.

5. 벡토르 OZ에 대응하는 복소수는 $-1+i$이다. OZ를 시계바늘반대방향으로 120° 돌려 OZ_1을 얻었다. 벡토르 ZZ_1에 대응하는 복소수는 ____이다.

- 선택문제

6. z_1, z_2가 복소수라고 할 때 $z_1 + z_2$가 실수이기 위하여서는 z_1, z_2의 공액복소수는 ( )이다.

A. 충분조건　　　　B. 필요조건

C. 필요충분조건　　　D. 우의 답은 아니다.

7. $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$ 일 때 복소수 $\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin 2\theta}$ 의 엄지각은 (　)이다.

A. $2\pi - 3\theta$　　B. $3\theta - 2\pi$　　C. 3θ　　D. θ

8. x 가 방정식 $x^3 = 1$ ($x \in \mathrm{C}$)의 한개 풀이이고 적 $(1 - x + x^2)(1 + x - x^2)$ 은 (　)과 같다.

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 1 또는 4

9. 복소수 $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ 를 n 제곱하여 얻은 적이 그의 공액복소수와 같으면 n 의 값은 (　)이다.

A. 3　　B. 12　　C. $6k - 1$　　D. $6k + 1$ $(k \in \mathrm{Z})$

10. z_1 는 복소수평면의 임의의 점이고 z 의 절대값이 1인 임의의 $2w = z - z_1$ 이면 w 가 표시하는 점의 자리길은 (　)이다.

A. 원의 중심이 z_1 이고 반경이 1인 원

B. 원의 중심이 $-z$ 에 대응하는 점이고 반경이 1인 원

C. 원의 중심이 $\frac{z_1}{2}$ 에 대응하는 점이고 반경이 $\frac{1}{2}$ 인 원

D. 원의 중심이 $-\frac{z_1}{2}$ 에 대응하는 점이고 반경이 $\frac{1}{2}$ 인 원

－ 해답문제

11. 다음 조건을 만족하는 복소수 z 에 대응하는 점의 모임이 표시하는 구역을 그려라.

1) $2 \le |z - i| < 3$

2) $|2z - 1 - i| \le 4$ 이고 $\frac{3}{4}\pi \le \arg z \le \frac{5}{4}\pi$

12. 복소수평면에서 $|z| = a(a > 0)$ 이라고 하자. 복소수 $\frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{2}\right)$ 이 표시하는 점의 자리길을 구하여라.

13. $|z_1| = 1,\ z_1 \ne z_2$ 이면 $\left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2}\right| = 1$ 임을 증명하여라.

14. 방정식 $2^{x+y} - 32 + i\log_6 x = i(1 - \log_6 y)$ 의 실수풀이를 구하여라.

8. 순렬과 조합, 2마디공식

1) 문제풀이방법

례 1. 5명에게 5가지의 서로 다른 일을 맡기려고 한다.

1) 지정된 한 사람에게 그가운데서 2가지 일이 차례지지 않도록 하는 방법은 몇가지인가?

2) 어떤 한 사람에게는 첫번째 일이 차례지지 않게 하고 다른 또 한 사람에게는 두번째 일이 차례지지 않도록 하는 방법은 몇가지인가?

(풀이) 1) 지정된 한 사람에게 2가지 일을 제외한 3가지 일가운데서 한가지를 맡기는 방법은 A_3^1, 나머지 4명에게 나머지 4가지 일을 맡기는 방법은 A_4^4

따라서 총 방법은 $A_3^1 \cdot A_4^4 = 72$(가지)이다.

2) 마찬가지 방법으로 첫 사람이 첫번째 일을, 둘째 사람이 두번째 일을 맡을수 없다고 하자. 5명에게 5가지 일을 맡기는 방법은 A_5^5이다.

그가운데서 첫 사람이 첫번째 일을, 둘째 사람이 두번째 일을 맡는 방법은 A_3^3

또 첫사람이 첫번째 일을 맡고 둘째 사람이 두번째 일을 맡지 않는 방법은 $A_4^4 - A_3^3$

$\therefore\ A_5^5 - A_3^3 - 2(A_4^4 - A_3^3) = A_5^5 - 2A_4^4 + A_3^3 = 78$(가지)

례 2. 매개 수자가 서로 다르며 1의 자리수와 천의 자리수와의 차의 절대값이 2인 네자리수는 몇개인가?

(풀이) 천의 자리수와 1의 자리수는 다음의 8개 묶음으로 된 모임들가운데서 선택가능하다.

{9, 7}, {8, 6}, {7, 5}, {6, 4}, {5, 3}, {4, 2}, {3, 1}, {2, 0}

마지막 묶음은 0이 천의 자리수로서 불가능하다.

$\therefore\ (C_7^1 \cdot A_2^2 + 1) \cdot A_8^2 = 840$ (개)

례 3. 어떤 학급에 남학생 20명과 녀학생 15명이 있다. 5명을 선출하여 그가운데서 적어도 2명이 녀학생이 되게 하는 선발방법은 몇가지인가?

(풀이) $C_{15}^2 \cdot C_{20}^3 + C_{15}^3 \cdot C_{20}^2 + C_{15}^4 \cdot C_{20}^1 + C_{15}^{15} = 236453$(가지)

(다른 방법) $C_{35}^{5}-C_{20}^{5}-C_{20}^{4}\cdot C_{15}^{1}=236453$(가지)

례 4. 수렬 $\{a_n\}$이 있다. $a_n=(-1)^{n-1}C_{100}^{2(n-1)}$일 때 첫째 마디부터 51번째 마디까지의 합을 구하여라.

(풀이) $S_{51}=1-C_{100}^{2}+C_{100}^{4}-C_{100}^{6}+C_{100}^{8}-\cdots+(-1)^{k-1}C_{100}^{2(k-1)}+\cdots+C_{100}^{100}$

한편 $(1+i)^{100}=-2^{-50}$

$$\begin{aligned}(1+i)^{100}&=1+C_{100}^{1}i+C_{100}^{2}i^2+C_{100}^{3}i^3+\cdots+C_{100}^{100}i^{100}\\&=1+C_{100}^{1}i-C_{100}^{2}-C_{100}^{3}i+C_{100}^{4}+C_{100}^{5}i\\&\quad-C_{100}^{6}+\cdots+C_{100}^{97}i-C_{100}^{98}-C_{100}^{99}i+C_{100}^{100}\\&=(1-C_{100}^{2}+C_{100}^{4}-C_{100}^{6}+\cdots+C_{100}^{97}i-C_{100}^{98}+C_{100}^{100})\\&\quad+i(C_{100}^{1}-C_{100}^{3}+C_{100}^{5}-C_{100}^{99})\end{aligned}$$

두 복소수가 서로 같으므로 실수부도 서로 같다.

$\therefore\ 1-C_{100}^{2}+C_{100}^{4}-C_{100}^{6}+\cdots+C_{100}^{97}i-C_{100}^{98}+C_{100}^{100}=-2^{50}$

례 5. 2^{1200}을 5로 나눌 때 나머지는 얼마인가?

(풀이) $2^{1200}=8^{400}=(5+3)^{400}=5^{400}+C_{400}^{1}5^{399}\cdot3^{1}+\cdots+3^{400}$

2마디전개식에서 앞의 400마디는 5의 배수이므로 3^{400}을 5로 나눌 때 나머지를 구하면 된다.

$$3^{400}=81^{100}=(5\times16+1)^{100}+C_{100}^{1}(5\times16)^{99}+\cdots+1$$

따라서 구하려는 나머지는 1이다.

2) 련습문제

- 빈칸채우기문제

1. $A_n^m=272$, $C_n^m=136$일 때 $n=$____, $m=$____이다.
2. 5개의 수자 1, 2, 3, 4, 5가운데서 2개 수를 취하여 밑수와 진수로 하는 로그수를 만드는데 서로 다른 수는 ___개 만들수 있다.
3. 99^{10}을 100으로 나눈 나머지는 ___이다.
4. $(x-2)^6$의 전개식에서 다섯째 마디가 480이다. 이때 $x=$____이다.
5. $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^2의 결수의 총합은 ____이다.

- 해답문제

6. 평면 M에서 4개의 점을 잡고 평면 N에서 5개의 점을 잡아 이 9개의 점으로 다음의 도형을 최대로 몇개 만들수 있는가?
   1) 직선　2) 평면　3) 3각뿔　4) 4각뿔　5) 5각뿔
7. 남학생 9명(A, B, C, D, E, F, G, H, I)과 녀학생 7명(a, b, c, d, e, f, g)가운데서 5명의 선수를 선출하는 방법에서
   1) 한명의 녀학생이 있는 경우
   2) 적어도 한명의 녀학생이 있는 경우
   3) 기껏 2명의 녀학생이 있는 경우
   4) 남학생 A가 없는 경우
   5) 녀학생 a와 남학생 A가 반드시 있는 경우
   6) 녀학생 a, b 두명가운데서 한명만 있는 경우
   7) 녀학생이 짝수명 있는 경우
   는 각각 몇가지 있는가?
8. m, n에 관한 방정식 $C_n^{m-1} : C_n^m : C_n^{m+1} = 2 : 3 : 4$를 풀어라.
9. 안같기식
   1) $x A_3^3 < A_x^3$
   2) $C_{24}^{2x} < C_{24}^{2x-2}$
   을 풀어라.
10. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 의 전개식에서 상수마디는 $(a+b)^{2n}$의 결수들의 합보다 2 180만큼 크다. $(a+b)^{2n}$의 전개식에서 결수가 최대인 마디를 구하여라.
11. $(x+2y+z)^9$의 전개식에서 $x^2y^3z^4$의 결수를 구하여라.
12. n이 자연수일 때 $9^n > (n+1)4^n$임을 증명하여라.

3) 자체시험문제

- 선택문제

1. 1－9까지 9개의 자연수들가운데서 임의로 3개 수를 취하여 만든 수의 묶음 (a, b, c)가 반드시 $a > b > c$를 만족하게 되는 서로 다른 수의 묶음은 (　)개이다.
   A. 21　B. 28　C. 84　D. 343

2. $\left(2a-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{10}$ 의 전개식에서 결수가 최대인 마디는 (　)이다.

A. 여섯번째　B. 다섯번째　C. 다섯, 여섯번째　D. 일곱번째

3. n이 자연수일 때 $\mathrm{C}_n^0 \cdot 2^n - \mathrm{C}_n^1 \cdot 2^{n-1} + \mathrm{C}_n^2 \cdot 2^{n-2} + \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^m \cdot 2^0$ 은 (　)과 같다.

A. 0　B. 1　C. $(-1)^n$　D. 2^n

－ 해답문제

4. n에 관한 안갈기식 $2 < \frac{\mathrm{A}_{n+1}^{n+1}}{\mathrm{A}_{n-1}^{n-1}} \le 42$ 를 풀어라.

5. 학생 25명이 5행5렬로 대렬을 지으려고 한다. 그가운데서 3명이 서로 다른 행, 서로 다른 렬에 서게 하는 방법은 몇가지가 있는가?

6. $(x+y)^n$의 전개식에서 3, 4, 5번째 마디의 값이 각각 168, -70, $\frac{35}{2}$이다. x, y, n을 구하여라.

9. 평면도형

1) 문제풀이방법

례 1. △ABC에서 정점 A에서 BC에 그은 수직선과 정점 B로부터 CA에 그은 수직선의 사귐점을 H라고 하고 AH, AB, BC의 가운데점을 각각 L, M, N이라고 하면 ∠LMN=∠R라는것을 증명하여라.(그림 9-1)

(풀이) △ABH에서 M, L은 각각 변 AB, AH의 가운데점이므로

$$ML \parallel BH$$

△ABC에서 M, N은 AB, BC의 가운데점이므로

$$MN \parallel AC$$

그런데 BH⊥AC이므로 ML⊥MN

∴ ∠LMN=∠R

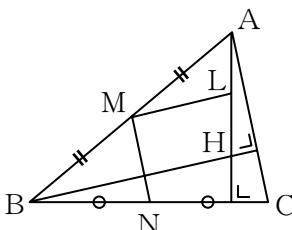



그림 9－1

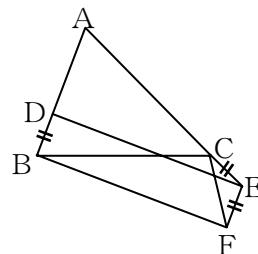



그림 9－2

례 2. AB≤AC인 △ABC의 변 AB에 점 D를 그리고 AC의 연장선에 점 E를 BD=CE 되게 잡으면 DE>BC라는것을 증명하여라.(그림 9-2)

(풀이) 평행4변형 BDEF를 만들고 CF를 맺으면

CE=DB=EF

∴ ∠ECF=∠EFC ①

또한 ∠CED<∠C≤∠B(바깥각의 성질)

∴ ∠CED<∠B ②

여기서 ∠BCE=∠A+∠B

∠EFB=∠BDE=∠A+∠CED

식 ②로부터 ∠BCE>∠EFB

식 ①로부터 ∠BCF>∠BFC

∴ BF>BC

BF=DE이므로 DE>BC

례 3. 4각형 ABCD에서 네 변과 대각선의 가운데점을 각각 P, Q, R, S, M, N이라고 하자. 이때 PR, QS, MN은 한 점을 지

난다는것을 증명하여라.

(풀이) 변 AB, BC, CD, DA, BD, AC의 가운데점을 각각 P, Q, R, S, M, N이라고 하자.(그림 9-3)

△BAC에서 P, Q는 각각 변 BA, BC의 가운데점이므로

$$PQ \parallel AC$$

마찬가지로 $SR \parallel AC$

$$\therefore\ PQ \parallel SR,\ PS \parallel QR$$

4각형 PQRS는 평행4변형이다.

△ABC에서 P, N은 각각 변 AB, AC의 가운데점이므로

$$PN \parallel BC$$

마찬가지로 $MR \parallel BC$

$$\therefore\ PN \parallel MR$$

$$\therefore\ PM \parallel NR$$

따라서 4각형 PMRN은 평행4변형이다.

▱PQRS에서 변 QS의 가운데점은 변 PR의 가운데점과 일치하고 ▱PMRN에서 MN의 가운데점은 변 PR의 가운데점과 일치한다.

따라서 PQ, QS, MN은 한 점을 지난다.

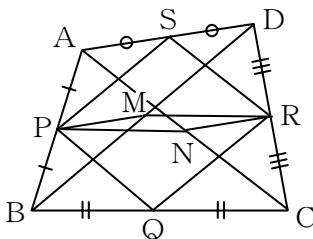



그림 9－3

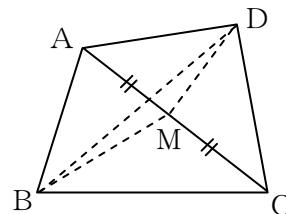



그림 9－4

례 4. 4각형 ABCD의 대각선 AC의 가운데점을 M이라고 하면

$$S_{\triangle BMD}=\frac{1}{2}\left|S_{\triangle ABD}-S_{\triangle BCD}\right|$$

임을 증명하여라.(그림 9-4)

(풀이) $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle BCM}$, $S_{\triangle ADM}=S_{\triangle DCM}$이므로

$$S_{4각형ABMD}=S_{4각형CBMD}$$

4각형 ABMD가 볼록일 때 4각형 CBMD는 오목이므로

$$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BMD}=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle BMD}$$

$$\therefore\ 2S_{\triangle BMD}=S_{\triangle BCD}-S_{\triangle ABD}$$

4각형 CBMD가 볼록인 경우도 마찬가지로

$2S_{\triangle BMD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCD}$

$\therefore \ 2S_{\triangle BMD} = \frac{1}{2}\left|S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCD}\right|$

례 5. 두 변 a, b와 변 a의 맞은각 A가 주어졌을 때 3각형을 그리면 두 3각형을 얻는다. 이 3각형의 셋째 변을 c_1, c_2라고 하면 $b^2 = a^2 + c_1c_2$라는것을 증명하여라.

(풀이) 변 b와 ∠A를 함께 가지도록 두 3각형 AB_1C와 AB_2C를 그리고 $B_1C = B_2C = a$, $CA = b$, $AB_1 = c_1$, $AB_2 = c_2$라고 하자.(그림 9-5)

정점 C에서 AB_1에 그은 수직선의 밑점을 D라고 하였을 때 $B_1C = B_2C$로부터 D는 B_1B_2의 가운데점이다. 이때

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= AC^2 - B_1C^2 \\ &= AD^2 - B_1D^2 \\ &= (AD + B_1D)(AD - B_1D) \end{aligned}$$

이고 $B_1D = B_2D$이므로

$$(AD + B_1D)(AD - B_1D) = AB_1 \cdot AB_2$$

$$\therefore \ b^2 - a^2 = AB_1 \cdot AB_2 = c_1c_2$$

$$\therefore \ b^2 = a^2 + c_1c_2$$

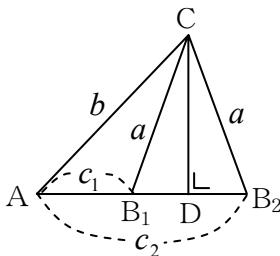



그림 9－5

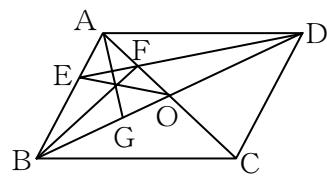



그림 9－6

례 6. 평행4변형 ABCD의 대각선 AC, BD의 사귐점을 O라고 하고 O와 변 AB의 임의의 점 E를 맺고 DE와 AO의 사귐점 F와 B를 맺는다. 변 BF, OE의 사귐점과 A를 맺는 직선과 BD가 사귀는 점을 G라고 하면 G는 △ABC의 무게중심이라는것을 증명하여라.(그림 9-6)

(풀이) △ABO에서 AG, BF, OE는 한 점에서 사귀므로 체바의 정리에 의하여

$$\frac{BG}{GO}\cdot\frac{OF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$$

또한 E, F, D는 한 직선에 놓이므로

$$\frac{BD}{DO}\cdot\frac{OF}{FA}\cdot\frac{AE}{EB}=1$$

$$\therefore\ \frac{BG}{GO}=\frac{FA}{OF}\cdot\frac{EB}{AE}=\frac{BD}{DO}$$

따라서 점 O는 평행4변형의 대각선의 사귐점이므로

$$\frac{BD}{DO}=\frac{2}{1}$$

즉 $\frac{BG}{GO}=\frac{2}{1}$

점 O는 변 AC의 가운데점이고 G는 변 BO를 2∶1로 내분하므로 △ABC의 무게중심이다.

례 7. 한 변의 길이가 a인 바른5각형의 대각선의 길이를 구하여라.

(풀이) 바른5각형을 ABCDE라고 하고 대각선 AC, BD를 그으면 △ABE, △BCA에서

$$EA=AB=BC,$$

$$\angle EAB=\angle ABC=108°$$

$$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle BCA \qquad \therefore\ BE=CA$$

마찬가지로 다른 대각선도 모두 같으므로 변 AC의 길이를 구한다.

$$AB=BC,\ \angle ABC=108°$$

$$\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-108°)=36°$$

같은 방법으로 ∠BAC=36°이므로 변 AC, BE의 사귐점을 F라고 하면

$$\angle CBF=108°-36°=72°$$

$$\angle CBF=36°+36°=72°$$

$$CF=BC=a$$

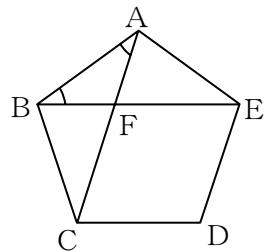
또한 △FAB∽△BCA이므로

$$\frac{FA}{AB}=\frac{BC}{AC}$$

$$FA\cdot AC=AB\cdot BC$$

AB=BC=CF=a이므로 AC=x라

그림 9－7

고 하면

$$\mathrm{FA}=x-a$$

$$(x-a)x=a^2$$

$$x^2-ax-a^2=0$$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}a$$

례 8. △ABC의 밑변 BC의 한 점 P로부터 변 AB, AC에 각각 평행으로 직선 PQ, PR를 긋고 변 AC, AB의 사귐점을 각각 Q, R라고 하여 ▱ARPQ를 만들 때 그 면적이 가장 크게 되는 점 P의 자리표를 구하여라.

(풀이) $S_{▱ARPQ}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle RBP}-S_{\triangle QPC}$

△ABC∽△RBP∽△QPC이므로 BC$=a$, BP$=x$로 놓으면

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{a^2}=\frac{S_{\Delta RBP}}{x^2}=\frac{S_{\Delta PQC}}{(a-x)^2}$$

$$S_{\triangle RBP}=\frac{x^2}{a^2}S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle QPC}=\frac{(a-x)^2}{a^2}S_{\triangle ABC}$$

$$S_{▱ARPQ}=\left[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{(a-x)^2}{a^2}\right]S_{\triangle ABC}$$

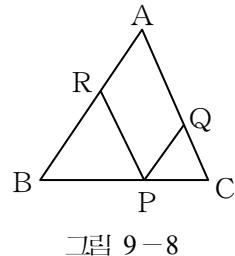
$$=2S_{\triangle ABC}\frac{x(a-x)}{a^2}$$

그림 9－8

이때 $\frac{2S}{a^2}$는 일정하며 $x(a-x)$는 $x=\frac{a}{2}$일 때 가장 큰 값을 가진다.

따라서 ▱ARPQ의 면적은 $x=\frac{a}{2}$일 때 즉 P가 BC의 가운데점일 때 가장 크게 된다.

례 9. △ABC의 외접원 O의 원둘레의 한 점 P로부터 BC, CA, AB 또는 그 연장선에 그은 수직선의 밑점을 각각 L, M, N이라고 하면 세 점 L, M, N은 한 직선에 놓인다는것을 증명하여라.

(풀이) 원에 내접하는 4각형 ABPC에서

$\angle NBP=\angle ABP=\angle MCP$ ①

또한 $\triangle NBP$와 $\triangle MCP$에서 식 ①이 성립하고 한편 $\angle BNP=\angle CMP=90°$이므로

$\angle NPB=\angle MPC$ ②

$\angle BNP=\angle BLP=90°$이므로 네 점 B, P, L, N은 한 원둘레에 놓인다.

$\angle BLN=\angle NPB$ ③

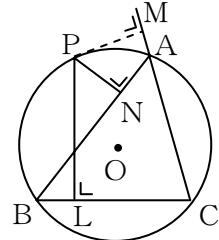
그림 9－9

또한 $\angle CMP=\angle CNP=90°$이므로 네 점 C, M, P, L은 한 원둘레에 놓인다.

$\angle CLM=\angle MPC$ ④

식 ②, ③, ④로부터

$\angle BLN=\angle CLM$

한편 $\angle BLN$과 $\angle CLM$은 변 BC의 반대쪽에 있으므로 세 점 L, M, N은 한 직선에 놓인다.

례 10. $\triangle ABC$의 변 BC의 가운데점을 M이라고 하고 점 A, M을 지나는 임의의 원둘레가 변 AB, AC를 자르는 점을 각각 D, E라고 할 때 점 B, D, M을 지나는 원과 점 C, E, M을 지나는 원은 반경이 같으며 서로 접한다는것을 증명하여라.

(풀이) 변 EM의 연장선이 점 B, D, M을 지나는 원둘레와 사귀는 점을 F라고 하고 점 M, D를 맺자.

그림 9－10

원에 내접하는 4각형 ADME에서

$\angle CEM=\angle ADM$

원에 내접하는 4각형 BDMF에서

$\angle ADM=\angle BFM$

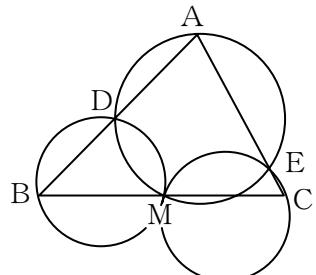
$\therefore\ \angle CEM=\angle BFM$ ①

또한 $\angle CME=\angle BMF$(맞문각) ②

$\triangle CEM$과 $\triangle BFM$에서 식 ①, ②가 성립하고 한편 $BM=MC$이므로

$\triangle CEM\equiv\triangle BFM$

따라서 점 B, F, M을 지나는 원 즉 점 B, D, M을 지나는 원과 점 C, E, M을 지나는 원은 합동인 3각형의 외접원으로서 같다.

다음으로 점 M에서 점 C, E, M을 지나는 원의 접선 TMS를 그으면

$$\angle SMB=\angle TMC=\angle CEM$$

한편 식 ①로부터 $\angle SMB=\angle BFM$

그러므로 직선 TMS는 점 B, D, M을 지나는 원에 접하며 따라서 점 B, D, M을 지나는 원과 점 C, E, M을 지나는 원은 서로 접한다.

례 11. 사귀는 두 직선으로부터의 거리의 합이 일정한 점의 자리길을 구하여라.

(풀이) 점 O에서 사귀는 두 직선을 XX′, YY′라고 하고 ∠XOY안에서 생각하자.

그림 9－11

반직선 OX에 점 A를 찍고 점 A로부터 직선 YY′에 수직선 AQ를 그어 AQ＝a(일정)되게 하면 A는 일정한 점이다.

∠XOY안에 조건에 맞는 임의의 점 P를 잡고 점 P로부터 반직선 OX, OY에 각각 수직선 PH, PK를 긋고 AQ에 수직선 PR를 그으면

$$PK+PH=a \text{ (일정)}$$

AP의 연장선과 반직선 OY가 사귀는 점을 B라고 하면 △APH, △PAR에서

$$PK+PH=RQ+AR$$

PK＝RQ이므로 PH＝AR

또한 AP는 공통변이고 $\angle AHP=\angle PRA$

$$\therefore \triangle APH\equiv\triangle PRA$$

$$\therefore \angle HAP=\angle PAR$$

그런데 PR∥BQ이므로 $\angle OAB=\angle OBA$

$$\therefore AO=BO$$

즉 점 P는 일정한 선분 AB에 있다. 거꾸로 선분 AB의 임의의 점을 P라고 하고 P로부터 OX, OY, AQ에 각각 수직선 PH, PK, PR를 그으면 △APH, △PAR에서 ∠AHP＝∠PRA, ∠HAP＝∠RPA, AP는 공통

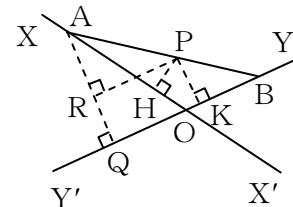
$$\therefore \triangle APH\equiv\triangle PAR$$

$$\therefore PH=AR$$

이로부터

$$PH+PK=AR+RQ=AQ=a$$

즉 점 P는 조건에 맞는다.

각 ∠X′OY, ∠X′OY′, ∠XOY′안에서도 우와 같은 방법

으로 생각할수 있으므로 구하려는 자리길은 직4각형 ABCD의 둘레이다.

례 12. 한 직선에 세개의 일정한 점 A, B, C가 차례로 주어졌을 때

$$\angle APB = \angle BPC$$

인 점 P의 자리길을 구하여라.

(풀이) 1) AB<BC인 경우

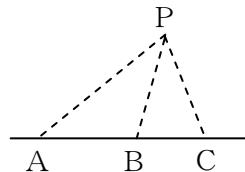
주어진 직선에

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

로 되는 점 D를 찍는다면 D는 일정한 점이다.

그림 9-12

조건에 맞는 점 P를 찍으면 선분 BP는 ∠APC의 2등분선이다. 따라서

$$\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{BC} \text{ (일정)}$$

이로부터 점 P는 일정한 선분 BD를 직경으로 하는 원둘레에 놓인다.

거꾸로 이 원둘레의 임의의 점을 P라고 하자.

∠BPD=∠R 또는 ∠CPB=∠BPA′로 되는 점 A′는 선분 BD를 직경으로 하는 원둘레에 놓인다.

거꾸로 이 원둘레의 임의의 점을 P라고 하자.

∠BPD=∠R 또는 ∠CPB=∠BPA′로 되는 점 A′를 선분 BD에 찍으면 PD는 ∠A′PC의 바깥각의 2등분선이다.

따라서

$$\frac{PC}{PA'} = \frac{BC}{A'B} = \frac{PC}{CA'}$$

$$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{A'B}{DA'}$$

그런데 $\frac{BC}{AB} = \frac{DC}{DA}$ 이므로 $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{DA}$

$$\therefore \frac{A'B}{DA'} = \frac{AB}{DA}$$

A, A′는 선분 BD의 점이므로 일치한다.

따라서 ∠APB=∠BPC이므로 조건에 맞는다.

따라서 구하려는 자리길은 일정한 선분 BD를 직경으로 하는 원둘레이다. 여기서 점 B, D는 제외한다.

2) AB>BC인 경우

우와 같은 방법으로 생각할수 있다.

3) AB=BC인 경우

자리길은 선분 AC의 수직2등분선이다. 여기서 점 B는 제외한다.

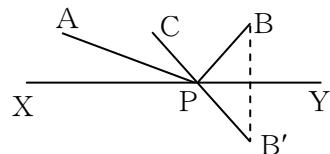
례 13. 일정한 직선 XY에 대하여 같은쪽에 일정한 두 점 A, B가 있다. XY에서 한 점 P를 구하되 $\angle APX - \angle BPY = \alpha$ (일정한 각)로 되게 하여라.

(풀이) 점 P가 구해졌다고 하고 직선 XY에 관한 점 B의 대칭점 B′를 찍은 다음 B′P의 연장선에 점 C를 잡으면

$$\angle APC = \angle APX - \angle CPX$$
$$= \angle APX - \angle B'PY$$
$$= \angle APX - \angle BPY = \alpha$$

그림 9-13

$\therefore\ \angle APB' = 180° - \alpha$

그리기] 직선 XY에 관한 점 B의 대칭점 B′를 찍고 AB′를 활줄로 하여 $180° - \alpha$를 포함하는 활등을 X방향으로 만들어 직선 XY와의 사귀는 점을 P라고 하면 P가 구하려는 점이다.

례 14. 일정한 두 점 A, B를 지나면서 일정한 원 O에 접하는 원을 그려라.

(풀이) 구하려는 원과 주어진 원 O와의 접점을 C라고 하고 C에서의 공통접선과 직선 AB가 사귀는 점을 P라고 하자.

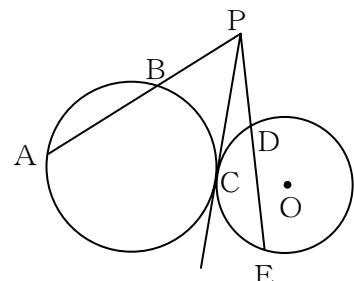
점 P로부터 원 O에 임의의 가름선 PDE를 그으면

$$PD \cdot PE = PC^2 = PA \cdot PB$$

이므로 점 A, B, C, D는 같은 원둘레에 있다.

그림 9-14

따라서 점 P는 선분 AB와 DE의 사귐점으로 점 P가 정해진다.

그리기] 점 A, B를 지나며 원 O와 사귀는 하나의 원을 그리고 그 사귀는 점들을 D, E라고 하자.

선분 AB와 DE가 사귀는 점 P로부터 원 O에 접선을 긋고 접점을 C라고 하면 세 점 A, B, C를 지나는 원은 구하려는 원이다.

증명] $PC^2 = PD \cdot PE = PA \cdot PB$

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 원은 점 C에서 선분 PC에 접하고 또 점 C에서 원 O에 닿는다.

을미] 풀이는 일반적으로 2개 있다.

례 15. 일정한 직선 XY의 같은쪽에 일정한 두 점 A, B가 있다. 직선 XY에서 점 P를 구하되 AP+BP를 가장 작게 하여라.

그림 9－15

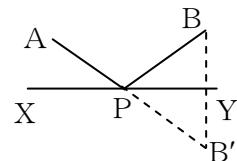
(풀이) 그리기] 점 B의 직선 XY에 관한 대칭점 B′를 찍고 AB′와 XY가 사귀는 점을 P라고 하면 P는 구하려는 점이다.

증명] 직선 XY에서 점 P밖의 임의의 점을 P′라고 하면

$$BP = B'P,\ BP' = B'P'$$

$$\therefore\ AP' + BP' = AP' + BP'$$

$$> AB' = AP + B'P = AP + BP$$

따라서 AP+BP는 가장 작다.

2) 련습문제

－ 선택문제

1. 다음의 4개 명제들가운데서 정확한것은 (　　)이다.
   1) 대응하는 두 변과 그가운데서 대응하는 한 변에 그은 가운데선들이 각각 서로 같은 두 3각형은 합동이다.
   2) 대응하는 두 각과 그가운데서 대응하는 한 각의 2등분선이 각각 서로 같은 두 3각형은 합동이다.
   3) 대응하는 두 변과 나머지 변에 그은 높이가 각각 서로 같은 두 3각형은 합동이다.
   4) 대응하는 두 변과 그 사이각의 2등분선이 각각 서로 같은 두 3각형은 합동이다.

   A. 1), 2), 3)　　　B. 1), 2), 4)
   C. 1), 3), 4)　　　D. 2), 3), 4)

2. 다음 명제들가운데서 정확한것은 (　　)이다.
   A. 대각선이 서로 같은 평행4변행은 직4각형이다.
   B. 한 쌍의 맞은변이 평행이고 한 각이 직각인 4각형은 직4각형이다.
   C. 대각선이 서로 수직인 평행4변형은 직4각형이다.

D. 대각선이 서로 같은 4각형은 직4각형이다.

– 해답문제

3. 어떤 도형과 그를 회전이동하여 얻은 다른 도형만이 주어졌을 때 회전중심과 회전각을 찾을수 있는가?
4. 직2등변3각형 ABC의 정점 A로부터 밑변 BC에 평행인 직선을 C쪽으로 긋고 그 직선에 점 E를 BE=BC 되게 잡는다. AC, BE의 사귐점을 F라고 하면 3각형 CEF는 2등변3각형이라는것을 증명하여라.
5. 평행4변형의 아낙각의 2등분선들은 린접한 두 변의 차와 같은 대각선을 가진 직4각형을 만든다는것을 증명하여라.
6. 3각형의 한 정점에서 나가는 2등분선, 가운데선, 높이의 연장선과 외접원둘레와의 세 사귐점들을 알고 그 3각형을 그려라.
7. 직4각형 ABCD에서 AB=a, BC=2a이고 정점 D로부터 AC에 그은 수직선의 밑점을 E라고 할 때 BE의 길이를 a로 표시하여라.
8. 4각형 ABCD에서 $AB^2+CD^2=CD^2+DA^2$이면 정점 B, D는 대각선 AC의 가운데점으로부터 같은 거리에 있다는것을 증명하여라.
9. 반경이 a인 원 O에서 그 반원둘레 AB를 6등분하여 생기는 점들가운데서 A 또는 B에 가장 가까운 점 P 및 Q를 맺는 활줄 PQ를 직경으로 하는 원 O′를 그리자. 이때 O와 O′의 부분으로 둘러싸인 두 초생달모양의 면적 S_1, S_2의 합을 구하여라.
10. 일정한 원 O안의 일정한 점 A를 잡고 원둘레를 따라 움직이는 점을 Q로 하였다. AQ=QP로 되는 점 P를 AQ의 연장선에 찍었을 때 점 P의 자리길을 구하여라.

3) 자체시험문제

– 선택문제

1. 다음 명제들가운데서 정확한것은 (　　)이다.
   A. 합동인 두 3각형은 점대칭이다.
   B. 대각선이 서로 2등분되는 4각형은 점대칭도형이다.
   C. 대각선이 서로 수직인 4각형은 축대칭도형이다.
   D. 두 3각형의 대응하는 점들을 련결할 때 한 점을 지나면 이 두 3각형은 점대칭이다.

– 해답문제

2. 3각형 ABC에서 무게중심을 G, 내심을 I라고 할 때 GI가 BC에 평행이면 이 3각형은 어떤 3각형인가?
3. 평행인 직선 AB, CD와 그사이에 두 점 E, F가 있다. 등변4각형을 그리되 두 변은 평행인 직선에 있고 나머지 두 변은 각각 주어진 점들을 지나도록 하여라.

4. 일정한 선분 AB의 일정한 점을 C라고 하자. 점 C를 지나 AB에 수직으로 그은 직선의 임의의 점을 P라고 하고 직선 AP, BP에 점 C로부터 내린 수직선의 밑점을 각각 Q, R라고 하면 직선 QR는 늘 일정한 점을 지나든가 또는 늘 AB에 평행임을 증명하여라.
5. 3각형 ABC의 변 BC의 한 점 P로부터 변 AB, AC에 각각 평행인 직선을 그어 AB, AC와의 사귐점을 각각 Q, R라고 하여 평행4변형 ARPQ를 만들 때 그 면적이 가장 크게 되는 점 P의 자리를 구하여라.
6. 한 직선에 세 점 A, B, C가 차례로 있다. 점 A로부터 점 B와 C를 지나는 원둘레에 접선을 그었을 때 접점 P의 자리길을 구하여라.
7. 그림 9－16에서 빗선친 부분의 면적과 원의 면적의 비는 CD∶AB이다는것을 증명하여라.
8. △ABC의 밑변 BC에 두 점 D, E를 BD＝CE되게 잡으면

$$AB+AC>AD+AE$$

임을 증명하여라.
9. 이웃한 두 변의 길이가 $a, b(a>b)$인 직4각형 ABCD의 정점 C가 A에 겹치도록 접었을 때 그 접어서 생긴 선의 길이를 구하여라.

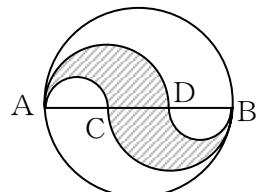



그림 9－16

10. 공간도형

1) 문제풀이방법

례 1. 둘씩 서로 사귀는 4개의 직선은 최대로 몇개의 평면을 이루는가?

(풀이) 둘씩 서로 사귀는 4개의 직선은 4가지 경우로 갈라볼수 있다.

첫 경우: 둘씩 서로 사귈 때 사귐점이 서로 다르다. 즉 6개의 사귐점을 지난다. 이때 4개의 직선은 1개의 평면만을 결정한다.

둘째 경우: 4개 직선이 공통점을 가지며 4개 직선이 한 평면에 놓인다. 이때에도 1개 평면만을 결정한다.

셋째 경우: 4개의 직선이 공통점을 가지며 세 직선이 한 평면에 놓인다. 이때에는 4개의 평면을 결정한다.

넷째 경우: 4개의 직선이 공통점을 가지며 세 직선이 한 평면에 놓이지 않는다. 이때에는 6개의 평면을 결정한다.

따라서 최대로 만들수 있는 평면은 6개이다.

례 2. 세개 평면이 둘씩 서로 사귀며 세개의 서로 다른 사귐선을 가진다는것을 증명하여라.

(증명) 세 평면을 α, β, γ라고 하고

$$\alpha \cap \beta = a,\ \beta \cap \gamma = b,\ \gamma \cap \alpha = c$$

라고 하자.

한 평면에 놓이는 두 직선은 서로 사귀거나 평행이므로

(1) $a \cap b = \mathrm{O}$라고 하면

$$b \subset \gamma$$

이므로 $\mathrm{O} \in \gamma,\ a \subset \alpha$이다.

$\mathrm{O} \in \alpha,\ c = \gamma \cap \alpha$ 이므로

$$\mathrm{O} \in c$$

따라서 a, b, c는 O에서 사귄다. (그림 10-1)

그림 10－1

(2) $a \parallel b$라고 하면 $b \subset \gamma,\ a \not\subset \gamma$ 이므로 $a \parallel \gamma$이며 $a \parallel c$이다.

따라서 a, b, c는 서로 평행이다. (그림 10-2)

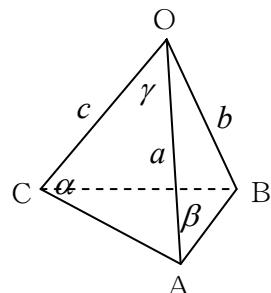
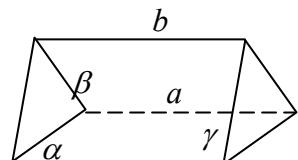



그림 10－2

례 3. 바른4면체 A−BCD의 모서리의 길이가 a이고 E, F는 모서리 BC와 AD의 가운데점이다. EF와 AB가 이루는 각과 AD와 BC사이의 거리를 구하여라.

그림 10−3

(풀이) 점 E를 지나 EG∥AB 되게 긋고 FG를 맺으면 EG와 FG는 각각 △ABC와 △ADC의 중간선이고 ∠FEG는 서로 다른 면에 놓이는 직선 AB와 EF가 이루는 각이다. (그림 10-3)
바른4면체의 모서리길이가 a이므로

$$EG=FG=\frac{a}{2}$$

AE=DE이므로 △ADE는 2등변3각형이다.

$$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a, \ AF=\frac{a}{2}$$

EF⊥AD이므로

$$EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

△EFG에서 $EF^2=EG^2+FG^2$
따라서 △EFG는 직2등변3각형이다.
이로부터 ∠FEG=45° 즉 EF와 AB가 이루는 각이 45°이다.
한편 EF⊥AD임을 알수 있다. 마찬가지방법으로

EF⊥BC

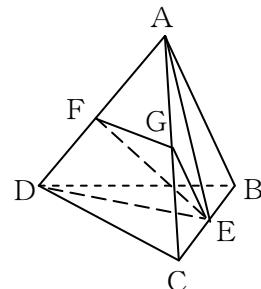
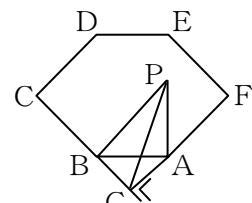
따라서 EF가 서로 다른 면의 직선 AD와 BC의 공통수직선이다.

$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}a$이므로 AD와 BC사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$이다.

례 4. 바른6각형 ABCDEF의 변길이는 a, PA⊥바른6각형 ABCDEF, PA=a이면 P에서 BC까지의 거리를 구하여라.

그림 10−4

(풀이) A에서 BC에 수직선을 긋고 그 밑점을 G라고 하면 AG는 PG의 사영으로 된다.
PA가 평면의 수직선이므로 세 수직선의 정리에 의하여

CG⊥PG

PG의 길이는 P에서 BC까지의 거리로 된다.

PA＝AB＝a 이므로 AG＝$\frac{\sqrt{3}}{2}a$

△PAG는 직3각형이므로

$$\mathrm{PG}=\sqrt{\mathrm{PA}^2+\mathrm{AG}^2}=\sqrt{a^2+\frac{3}{4}a^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}a$$

례 5. 평면밖의 한 점에서 평면에 수직선과 두개의 빗선을 그었다. 두개의 빗선과 평면이 이루는 각의 차는 45°, 그 빗선의 평면우의 사영선의 길이는 각각 2cm, 12cm이다. 이 점으로부터 평면사이의 거리를 구하여라.

(풀이) 그림 10-5에서 수직선을 PO＝x 라고 하면

AO＝12cm, BO＝2cm

$$\tan\angle\mathrm{PAO}=\frac{x}{12},\ \tan\angle\mathrm{PBO}=\frac{x}{2}$$

∠PBO＝∠PAO＝45° 이므로

$$\tan(\angle\mathrm{PBO}-\angle\mathrm{PAO})=\frac{\frac{x}{2}-\frac{x}{12}}{1+\frac{x^2}{24}}=\tan 45°$$

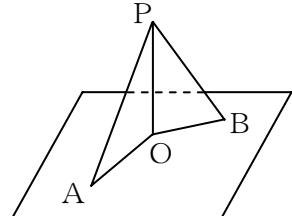



그림 10－5

$$\therefore\ \frac{5x}{12}=1+\frac{x^2}{24},\ x^2-10x+24=0$$

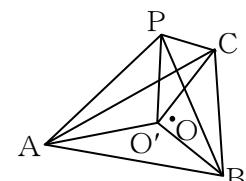
$$x_1=4,\ x_2=6$$

따라서 P에서 평면까지의 거리는 4cm 또는 6cm

례 6. 1) 평면 α 밖의 한 점 P에서 평면에 길이가 같은 3개의 빗선을 긋고 그 끌점을 각각 A, B, C라고 하고 O는 △ABC의 외심이라고 할 때 OP⊥α 를 증명하여라.

2) 평면 ABC밖의 한 점 P에서 △ABC의 세 변까지의 거리가 서로 같고 O는 내심일 때 OP⊥평면 ABC임을 증명하여라.

그림 10－6

(증명) 1) PO′⊥평면 ABC 되게 PO′를 긋고 O′A, O′B, O′C를 맺으면 O′A, O′B, O′C는 각각 PA, PB, PC의

사영이다.

PA＝PB＝PC이므로

$$O'A = O'B = O'C$$

따라서 O′는 △ABC의 외심이고 O′와 O는 일치한다.

PO′⊥평면 ABC이므로 PO⊥평면 ABC이다.

2) P에서 △ABC의 세 변까지의 거리를 각각 PD, PE, PF라고 하자.(그림 10－7)

PO′⊥평면 ABC 되게 O′를 잡고 O′D, O′E, O′F를 맺자.

이때 O′D, O′E, O′F는 각각 PD, PE, PF의 사영이고 AB⊥PD, BC⊥PE, AC⊥PF이므로 세 수직선의 정리로부터

그림 10－7

$$O'D \perp AB,\ O'E \perp BC,\ O'F \perp AC$$

PD＝PE＝PF이므로

$$O'C = O'E = O'F$$

따라서 O′는 △ABC의 내심 즉 O′와 O는 일치한다.

PO′⊥평면 ABC이므로 PO⊥평면 ABC

례 7. 4각뿔 S－ABCD에서 ∠A＝∠D＝90°, DC＝$2a$, AB＝AD＝a, SD⊥밑면 ABCD, SD＝a, 점 M은 SA의 점이고 SM＝x, 평면 CDM과 모서리 SB가 사귀는 점을 P라고 하면

1) 4각형 DCPM은 한 각이 직각인 제형이라는것을 증명하여라.

2) a와 x를 리용하여 이 제형의 면적을 표시하여라.

3) x가 어떤 값일 때 CM의 길이가 최소로 되겠는가? 그리고 이 길이를 구하여라.(그림 10-8)

(풀이) 1) SD⊥밑면 ABCD, DA⊥AB이므로 SA⊥AB

$$\therefore\ AB \perp \text{평면 } SAD$$

MD⊥평면 SAD

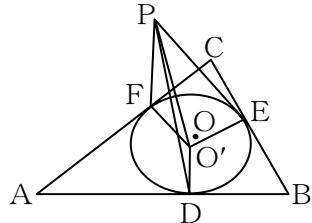
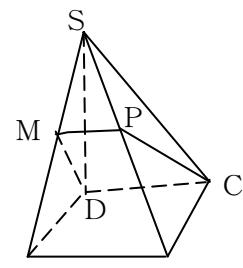
AB⊥MD ①

평면 DCPM∩평면 SAB＝MP

CD∥AB로부터 CD∥평면 SAB

∴ CD∥PM ②

그림 10－8

식 ①, ②, MD∥PC, CD⊥MD로부터 4각형 DCPM은

한 각이 직각인 제형이라는것이 얻어진다.

2) $\triangle SMP \backsim \triangle SAB$로부터

$$MP = \frac{AB \cdot SM}{SA}$$

$SP = x$, $AB = AD = SD = a$, $CD = 2a$

$$\therefore\ SA = \sqrt{2}a,\ \angle DSM = 45°$$

$$\therefore\ MP = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$\triangle DSM$에서

$$MD = \sqrt{x^2 - \sqrt{2}ax + a^2}$$

$$\therefore\ S_{DCPM} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}x + 4a\right)\sqrt{x^2 - \sqrt{2}ax + a^2}$$

3) $\triangle CDM$이 직3각형이므로 $CD = 2a$

$\therefore\ CM^2 = CD^2 + MD^2$

$$= x^2 - \sqrt{2}ax + 5a^2 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \frac{9}{2}a^2$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 일 때 CM^2은 최소값을 가지며 CM의 최소값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이다.

례 8. 바른4면체 P－ABC에서 D는 PB의 가운데점이다.

1) AD와 BC가 이루는 각의 크기를 구하여라.

2) AD와 평면 PAC가 이루는 각의 크기를 구하여라.

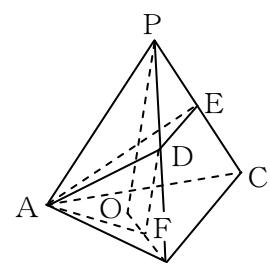
그림 10－9

(풀이) 1) PC의 가운데점 E를 잡고 DE를 맺으면

$$DE /\!/ BC$$

AE를 맺으면 $\angle ADE$는 AD와 BC가 이루는 각이다.

바른4면체모서리의 길이가 1이라고 하면

$$DE = \frac{1}{2},\ AD = \frac{\sqrt{3}}{2} = AE$$

2등변3각형 ADE에서

$$\cos\angle ADE = \frac{\frac{1}{2}DE}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore\ \angle ADE = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$$

2) 바른4면체의 대칭성에 의하여 AD와 평면 PAC가 이루는 각의 크기는 AD와 평면 ABC가 이루는 각의 크기와 같다. P에서 평면 ABC에 수직선을 긋고 그 밑점을 O라고 하자. BO를 맺고 D를 지나 PO에 평행인 직선을 그어 평면 ABC와 사귀는 점을 F라고 하면 DF⊥평면 ABC이고 F는 BO의 가운데점이다. AF를 맺으면 ∠DAF는 AD와 평면 ABC가 이루는 각이다.

$BO=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $PB=1$ 이므로

$$PO=\frac{\sqrt{6}}{3},\quad DF=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sin\angle DAF=\frac{DF}{AD}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore\ \angle DAF=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$$

따라서 AD와 평면 PAC가 이루는 각은 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$

례 9. 바른3각기둥 $ABC-A'B'C'$의 밑면의 한 변의 길이는 $2a$, D는 AA'의 가운데점이다.

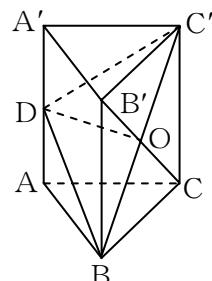
1) $\triangle BDC'$와 밑면 $\triangle ABC$가 이루는 2면각의 크기를 구하여라.

2) 평면 BDC'⊥평면 $BCC'B'$를 증명하여라.

그림 10－10

(풀이) 1) 2면각의 크기를 구하자.

$\triangle ABC$가 $\triangle BDC'$의 사영이므로

$$S'=S\cos\theta \quad 즉\quad \cos\theta=\frac{S'}{S}$$

$\triangle BDC'$는 2등변3각형이다.

$$BC' = \sqrt{5}a$$

$$S_{\triangle BDC'} = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{13}}{4}a^2$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\theta = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$$

2) $B'C$를 맺고 BC'와 $B'C$와의 사귐점을 O라고 하고 D, O를 맺으면 $\triangle BC'D$가 2등변3각형이고 BC'와 $B'C$가 서로 2등분하므로

$$DO \perp BC',\ DO \perp B'C$$

$$\therefore DO \perp \text{평면 } BCC'B'$$

$DO \subset$평면 $BC'D$이므로 평면 $BC'D \perp$평면 $BB'C'C$

례 10. 평행인 평면사이에 있는 두개 선분이 각각 13cm와 15cm이고 한 평면에로의 사영의 합은 14cm이다. 이 두 사영의 길이와 두 평면사이의 거리를 구하여라.

(풀이) $AC = 13,\ A'C' = 15$

그림 10－11

$$AB \perp \beta,\ A'B' \perp \beta$$

$$BC + B'C' = 14$$

$\alpha \parallel \beta$이므로 $AB \perp \alpha,\ A'B' \perp \alpha$

$$AB = A'B'$$

$BC = x,\ B'C' = 14 - x$

$$13^2 - x^2 = 15^2 (14 - x)^2$$

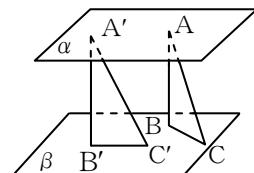
$$x = 5$$

$\therefore BC = 5\text{cm},\ B'C' = 9\text{cm}$

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\text{ cm}$$

례 11. 빗3각기둥 $ABC-A_1B_1C_1$의 밑면은 길이가 a인 바른3각형이고 모서리 AA_1와 밑면의 두 변 AB, AC는 모두 45°의 각을 이룬다.

1) $AA_1 \perp BC$임을 증명하여라.

2) 옆면 $BB_1A_1A \perp$옆면 CC_1A_1A임을 증명하여라.

3) AA_1와 BC사이의 거리를 구하여라.

(증명) 1) $\angle AA_1B = \angle A_1AC$이므로 $A_1O \perp$평면 ABC 되게 A_1O를 그으면 AO는 $\angle BAC$의 2등분선이다.

AO가 AA_1의 밑면 ABC에로의 사영이므로 세 수직선의 정리로부터

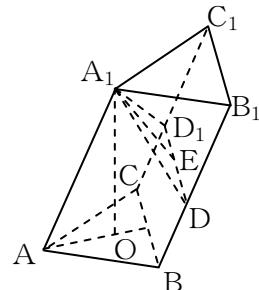
$AA_1 \perp BC$

그림 10－12

2) 점 A_1을 지나며 선분 AA_1에 수직인 두개의 선분 A_1D와 A_1D_1를 옆면 ABB_1A_1, ACC_1A_1에 그으면 $\angle DA_1D$는 2면각 $B-AA_1C$의 평면각이다.

$A_1B_1 = A_1C_1 = a$,

$\angle A_1B_1D = \angle A_1C_1D_1 = 45°$

$$\therefore\ A_1D = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a,\ DD_1 = a$$

따라서 $\triangle A_1DD_1$은 직3각형이므로 $\angle DA_1D_1$은 직각이다. 이로부터 2면각 $D-AA_1D_1$은 직2면각이다.

따라서 옆면 $BB_1A_1A \perp$옆면 CC_1A_1A

3) $\triangle A_1DD_1$에서 $AE \perp DD_1$ 되게 AE를 그으면 선분 AE는 평행직선 AA_1과 평행평면 BCC_1B_1사이의 거리이다.

따라서 A_1E의 길이 즉 서로 다른 면의 직선 AA_1과 BC 사이의 거리는

$$A_1E = \frac{a}{2}$$

례 12. 바른4각형 ABCD와 ABEF가 있는 평면이 서로 수직이다. M, N은 각각 선분 AC, BF의 점이고 AM＝FN, AM＝x이다.

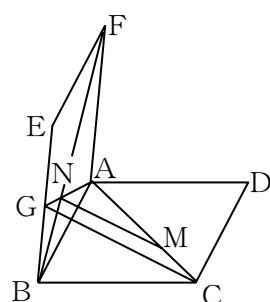
1) MN∥평면 BEC임을 증명하여라.

2) AM과 FN이 이루는 각을 구하여라.

3) MN의 길이를 구하여라.

4) x가 어떤 값일 때 MN이 가장 짧겠는가?

그림 10－13

(풀이) 1) 점 A, N을 련결하고 연장하여 BE와 사귀는 점을 G라고 하고 점 C와 G를 맺으면

$$\frac{AN}{NG}=\frac{FN}{NB}=\frac{AM}{MC}$$ 이므로

$\therefore$ MN // CG

CG⊂평면 BEC이므로 MN // 평면 BEC

2) AM과 FN이 이루는 각은 바른6면체에서 서로 이웃한 두 면에서 서로 사귀지 않는 두 대각선사이의 뾰족각이다.(그림 10－14)

BF를 CK로 평행이동하면 AM과 FN사이의 각은 AC와 CK사이의 각으로 된다.

△ACK는 바른3각형이므로

∠ACK＝60°

따라서 AM과 FN사이의 각은 60°

그림 10-14

3) △BCG≡△ABG이므로 AG＝CG

$\therefore$ MN＝AN

△AFN에서 AF＝a, FN＝x

$$MN=AN=\sqrt{a^2+x^2-2ax\cos 45^\circ}$$
$$=\sqrt{a^2+x^2-\sqrt{2}ax}$$

4) $MN=\sqrt{a^2+x^2-\sqrt{2}ax}=\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+\frac{a^2}{2}}$

$\therefore$ $x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 일 때 MN의 최소값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 이다.

례 13. △ABC와 △DBC가 놓이는 평면이 120°의 2면각을 이룬다. AB＝BC＝BD＝a, $\angle BCA=\angle DBC=120^\circ$ 일 때

1) AD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 구하여라.

2) 2면각 A－BDC의 크기를 구하여라.

(풀이) 1) 점 A에서 CB의 연장선에 CB⊥AE 되게 수직선 AE를 긋자. 그 밑점을 E라고 하고 D와 맺으면 △ABE≡△DBE이므로

DE⊥CE, DE＝AE

∠AED는 2면각 A－BCD의 평면각이다.

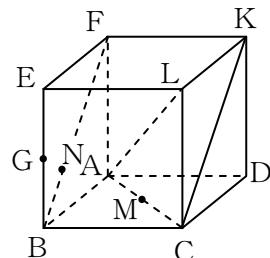
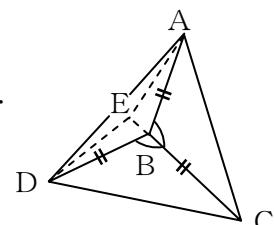



그림 10－15

$\therefore\ \angle AED = 120°$

2등변3각형 ADE에서

$\angle ADE = 30°$

CE⊥AE, CE⊥DE이므로 CE⊥ 평면 ADE이고 CE⊂ 평면 CDE이므로 CE⊥ 평면 ADE

점 A를 지나 평면 DBC의 수직선 AF를 그으면 F는 반드시 DE의 연장선에 놓인다. 즉 ∠ADF는 AD와 평면 BCD가 이루는 각이다.

$\therefore\ \angle ADF = 30°$

따라서 AD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 30° 이다.

2) 변 DB를 연장하고 점 F에서 평면 DBC에 FG⊥DB 되게 수직선을 그어 DB의 연장선과 사귀는 점을 G라고 하고 AG를 맺자.

AF⊥평면 BCD이고 FG⊥DG이므로 세 수직선의 정리에 의하여 AG⊥DG

∠ACF는 2면각 A−BDC의 평면각의 보탬각이다.

$AB = a$, $\triangle ABE = 60°$이므로

$$AE = \frac{\sqrt{3}}{2}a = DE,\ \angle AED = 120°,\ AF \perp DF$$

$$AF = \frac{\sqrt{3}}{2}AE = \frac{3}{4}a,\ EF = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

$$DF = \frac{3\sqrt{3}}{4}a,\ \angle FDG = 30°$$

직3각형 DFG에서 $FG = \frac{1}{2}DF = \frac{3\sqrt{3}}{8}a$

$$\tan\angle AGF = \frac{AF}{FG} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore\ \angle AGF = \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\angle AGH = \pi - \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

즉 2면각 A－BDC의 크기는 $\pi - \arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이다.

례 14. 직6면체 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$이 있다. 대각선 BD'_1과 AB, BC, BB′가 이루는 뾰족각이 각각 α, β, γ 이고 평면 ABCD, 평면 BCC′B′, 평면 ABB′A′가 이루는 각이 각각 α', β', γ' 이다.

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

3) $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 2$

4) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

임을 증명하여라.

(증명) 직6면체의 세 모서리를 a, b, c, 대각선의 길이를 l 이라고 하면 $\angle ABD' = \alpha$, $\angle CBD' = \beta$, $\angle B'BD = \gamma$, $\angle D'BD = \alpha'$, $\angle C'BD' = \beta'$, $\angle A'BD' = \gamma'$ 이다.

1) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{l^2} + \frac{c^2}{l^2} = \frac{l^2}{l^2} = 1$

2) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{b^2 + c^2}{l^2} + \frac{c^2 + a^2}{l^2} + \frac{a^2 + b^2}{l^2}$

$$= \frac{2l^2}{l^2} = 2$$

3) $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' =$

$$= \frac{a^2 + b^2}{l^2} + \frac{b^2 + c^2}{l^2} + \frac{c^2 + a^2}{l^2} = 2$$

4) $\sin^2\alpha' + \sin^2\beta' + \sin^2\gamma' = \frac{c^2}{l^2} + \frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{l^2} = 1$

례 15. 각뿔대의 웃면의 면적은 S′, 아래밑면의 면적은 S이다. 각뿔대의 높이의 한 점 P를 지나며 밑면에 평행인 자름면의 면적을 S_1이라고 하고 점 P가 각뿔대의 높이를 우로부터 아래로 나누는 비가 λ 라고 하면

$$\sqrt{S_1} = \frac{\sqrt{S'} + \lambda\sqrt{S}}{1 + \lambda}$$

라는것을 증명하여라.

(증명) 바른4각뿔대로 보고 증명하자.

평행인 자름면과 우, 아래밑면은 닮은 다각형이므로

$$S' : S_1 : S = O'A'^2 : PQ^2 : OA^2$$

$\therefore \sqrt{S'} : \sqrt{S_1} : \sqrt{S} = O'A' : PQ : OA$

$$\frac{O'P}{PO} = \frac{A'Q}{QA} = \lambda$$

$A'EF \parallel OO'$ 되도록 하면

$$\frac{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S'}} = \frac{OA - O'A'}{PQ - Q'A'} = \frac{AF}{EQ}$$

$$= \frac{AA'}{A'Q} = \frac{1+\lambda}{\lambda}$$

$$\sqrt{S}\lambda - \sqrt{S'}\lambda = \sqrt{S_1} - \sqrt{S'} + \lambda\sqrt{S_1} - \lambda\sqrt{S'}$$

$$\sqrt{S'} + \lambda\sqrt{S} = (1+\lambda)\sqrt{S_1}$$

$\therefore \sqrt{S_1} = \dfrac{\sqrt{S'} + \lambda\sqrt{S}}{1+\lambda}$

례 16. 각뿔의 높이는 h이고 밑면이 등변4각형이다. 두 옆면이 각각 밑면에 수직이고 이 두 옆면사이의 2면각은 120°이며 다른 두 옆면과 밑면은 각각 30°의 각을 이룬다. 이 각뿔의 겉면적을 구하여라.

(풀이) 옆면 VAD와 옆면 VDC는 모두 밑면에 수직이므로

$$VD \perp \text{밑면 } ABCD,\ VD \perp AD,\ VD \perp CD$$

$\therefore \angle ADC = 120°$

밑면 ABCD에서 $DH \perp AB$ 되게 긋고 V와 H를 맺으면

$$AB \perp VH,\ \angle VHD = 30°$$

직3각형 VHD에서

$$VD = h,\ DH = \sqrt{3}h,\ VH = 2h$$

4각형 ABCD가 등변4각형이므로 △ABD는 바른3각형이다.

$DH = \sqrt{3}h$ 이므로 $AB = 2h$

$$S_{\text{등변4각형}ABCD} = AB \cdot DH = 2\sqrt{3}h^2$$

$\therefore S_{\text{겉면적}} = VH \cdot AB + AD \cdot VD + AB \cdot DH$

$$= 2h \cdot 2h + 2h^2 + 2\sqrt{3}h^2 = 2\left(3+\sqrt{3}\right)h^2$$

례 17. 바른3각뿔의 옆면적은 $18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$이고 높이는 3cm이다. 밑면

의 중심을 지나며 한 옆면에 평행인 평면으로 자를 때 자름면의 면적과 그와 밑면이 이루는 각을 구하여라.

(풀이) 자름면 $\triangle DEF \parallel$ 옆면 PAB이므로

$$\frac{S_{\Delta DEF}}{S_{\Delta PAB}}=\frac{CD^2}{CB^2}=\frac{CO^2}{CG^2}=\frac{4}{9}$$

그림 10－16

$S_{\triangle PAB}=6\sqrt{3}$ 이므로

$$S_{\triangle DEF}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\ (cm^2)$$

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PG=\frac{1}{2}a\sqrt{9+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2+108}{12}}=6\sqrt{3}$$

이므로

$$\left(a^2-3b\right)\left(a^2+144\right)=0$$

$$\therefore\ a=6$$

$$PG=\sqrt{\frac{a^2+108}{12}}=2\sqrt{3},\ OG=\frac{\sqrt{3}}{6}a=\sqrt{3}$$

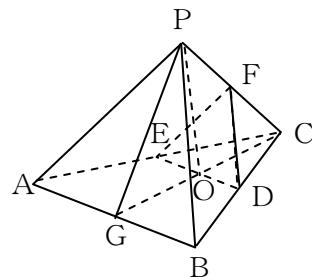
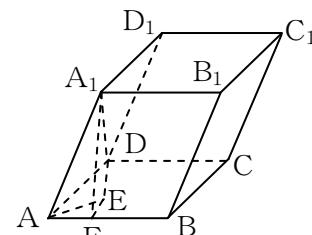
옆면과 밑면이 이루는 2면각 $\angle PGC$의 크기를 α 라고 하면

$$\alpha=\arctan\frac{1}{2}=60°$$

자름면 $\triangle DEF \parallel$옆면 $\triangle PAB$이므로 자름면 $\triangle DEF$와 밑면이 이루는 각은 60° 또는 120°이다.

례 18. 평행6면체의 한 정점에서 서로 사귀는 세 모서리의 길이는 각각 $a,\ b,\ c$ 이다. 매개 두 모서리들은 모두 60°의 각을 이룬다. 그의 체적을 구하여라.(그림 10-17)

그림 10－17

(풀이) $AB=a,\ AD=b,\ AA_1=c$ 라고 하고
$\angle BAA_1=\angle DAA_1=\angle BAD=60°,$

$$V = Sh,\ S = ab\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}ab$$

일 때 h를 구하자.

$AE_1\perp$밑면 ABCD 되게 A_1E를 긋고 $EF\perp AB$ 되게 긋고 A_1F를 맺으면

$$AB\perp A_1F$$

AE를 맺으면 AE는 AA_1의 아래밑면에 대한 사영이다.

또한 $\angle A_1AD=\angle A_1AB$이므로 AE는 $\angle A$의 2등분선이다.

$$AF=\frac{1}{2}c,\ AE=\frac{2\sqrt{3}}{3}AF=\frac{\sqrt{3}}{3}c$$

$$AE=h=\sqrt{AA_1^2-AE^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}c$$

$$\therefore\ V=Sh=\frac{\sqrt{3}}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}c=\frac{\sqrt{2}}{2}abc$$

례 19. 직3각기둥 $ABC-A_1B_1C_1$에서 $BB_1=BC=1$, $AB=2$, 2면각 $A-BB_1-C$의 크기는 120°이다.

1) 직선 A_1C와 옆면 A_1B가 이루는 각의 크기를 구하여라.

2) 4각뿔 $A_1-BCC_1B_1$의 체적을 구하여라.(그림 10－18)

그림 10－18

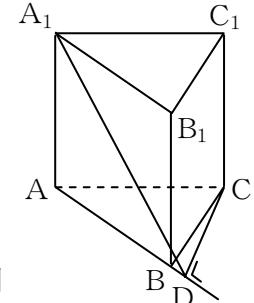
(풀이) 1) AB를 연장하고 $CD\perp AB$ 되게 AB의 연장선에 점 D를 찍고 A_1D를 맺으면 직3각기둥이므로 평면 $ABC\perp$평면 A_1ABB_1이다.

$\therefore$ $CD\perp$평면 A_1ABB_1

$\angle CA_1D$가 A_1C와 평면 A_1ABB_1이 이루는 각이다.

$$\angle ABC=120°$$

$$\angle CBD=60°,\ CD=BC\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BD=\frac{1}{2},\ AD=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore\ A_1D=\sqrt{AA_1^2+AD^2}=\sqrt{1+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\tan\angle CA_1D=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{29}}{2}}=\frac{\sqrt{87}}{29}$$

$$\therefore\ \angle CA_1D=\arctan\frac{\sqrt{87}}{29}$$

즉 A_1C와 옆면 A_1B가 이루는 각의 크기는 $\arctan\frac{\sqrt{87}}{29}$

2) $V_{A_1-BCC_1B_1}=\frac{2}{3}V_{각기둥}=\frac{2}{3}S_{\Delta ABC}\cdot AA_1$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$AE\perp CB$ 되게 그으면 $AE\perp$평면 BCC_1B_1이며 AE는 4각뿔 $A_1-BCC_1B_1$의 높이이다.

$$\therefore\ V_{A_1-BCC_1B_1}=\frac{1}{3}S_{BCC_1B_1}\cdot AE=\frac{1}{3}\times 1^2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

례 20. 바른6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$의 모서리의 길이가 2이다. AA_1와 CC_1의 가운데점 E와 F를 지나는 자름면 BFD_1E를 취할 때

1) 평면 BFD_1E와 밑면 ABCD가 이루는 2면각의 크기를 구하여라.

2) $V_{A_1-EBFD_1}$을 구하여라.

3) 점 A로부터 평면 $EBFD_1$의 거리를 구하여라.

(풀이) 1) 밑면은 바른4각형 ABCD이므로 $S_{ABCD}=4$

자름면 BFD_1E는 등변4각형이므로

$$EF=2\sqrt{2},\ BD_1=2\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{BFD_1E}=\frac{1}{2}\cdot BF\cdot BD_1=2\sqrt{6}$$

구하려는 2면각의 평면각이 θ라고 하면

$$\cos\theta=\frac{S_{ABCD}}{S_{BFD_1E}}=\frac{4}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore\ \theta = \arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$$

즉 평면 BFD_1E와 밑면 ABCD가 이루는 2면각의 크기는

$$\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$$

2) $V_{A_1-BFD_1E} = V_{F-A_1BE} + V_{F-AD_1E} =$

$$= \frac{1}{3}\cdot S_{\Delta A_1BE}\cdot BC + \frac{1}{3}\cdot S_{\Delta AD_1E}\cdot CD_1$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2 = \frac{4}{3}$$

3) E가 AA_1의 가운데점이므로 A와 A_1로부터 평면 $EBFD_1$까지의 거리는 같다.

구하려는 4각뿔 A_1-EBFD_1의 높이를 h라고 하면

$$V_{A_1-BFD_1E} = \frac{1}{3}\cdot V_{BFD_1E}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{6}\cdot h = \frac{4}{3}$$

$$\therefore\ h = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

례 21. 바른4각뿔의 옆면적이 b^2일 때 그 체적이 최대로 되도록 높이와 밑면의 변의 길이를 구하여라.(그림 10－19)

그림 10－19

(풀이) 밑면의 변의 길이를 a, 옆면의 높이를 h'라고 하자.

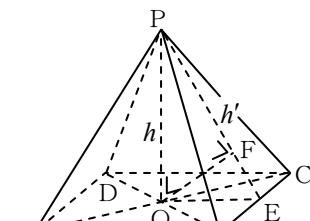
$S_{옆} = b^2$이므로

$$S_{\Delta PBC} = \frac{1}{4}b^2$$

$$\frac{1}{2}ah' = \frac{1}{4}b^2 \qquad \therefore\ h' = \frac{b^2}{2a}$$

BC⊥직3각형 POE이므로 평면 PBC⊥평면 POE

OF⊥PE 되게 점 F를 PE에 잡으면 OF⊥평면 PBC

$$V_{P-ABCD} = 4\cdot V_{O-PBC} = 4\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta PBC}\cdot OF = \frac{1}{3}\cdot b^2\cdot OF$$

$$\mathrm{OF}=\frac{\frac{a}{2}\cdot h}{h'}$$

$$\mathrm{V}_{\text{P-ABCD}}=\frac{b^2}{6}\cdot\frac{a\cdot\sqrt{\left(\frac{b^2}{2a}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{b^2}{2a}}=\frac{a}{6}\cdot\sqrt{b^4-a^4}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}^4_{\text{P-ABCD}}=\frac{a^4}{6^4}\left(b^4-a^4\right)^2=\frac{2a^4}{2\cdot 6^4}\quad\left(b^4-a^4\right)\left(b^4-a^4\right)$$

$2a^4+\left(b^4-a^4\right)+\left(b^4-a^4\right)=2b^4$ 은 정수이므로

$$\mathrm{V}^4_{\text{P-ABCD}}\le\frac{1}{2\cdot 6^4}\cdot\left(\frac{2b^4}{3}\right)^3$$

$$\therefore\quad \mathrm{V}_{\text{P-ABCD}}\le\frac{\sqrt[4]{12}}{18}\cdot b^3$$

$2a^4=b^4-a^4$ 이므로 $a=\frac{b}{\sqrt[4]{3}}=\frac{\sqrt[4]{27}}{3}b$

일 때 바른4각뿔의 체적이 최대로 된다.

이때 $h=\frac{1}{2a}\sqrt{b^4-a^4}=\frac{\sqrt{2}}{2a}a^2=\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt[4]{108}}{6}b$

따라서 밑면의 변의 길이는 $\frac{\sqrt[4]{27}}{3}b$, 높이는 $\frac{\sqrt[4]{108}}{6}b$ 일 때 바른4각뿔의 체적의 최대값은 $\frac{\sqrt[4]{12}}{18}b^3$ 이다.

2) 련습문제

1. 한개 평면과 두 평행직선들이 주어졌을 때 한 직선이 이 평면과 하나의 공통점을 가지면 다른 직선도 이 평면과 하나의 공통점을 가진다는것을 증명하여라.
2. 직선 a 와 직선 b 는 어기는 두 직선이다. 직선 c 와 a 는 평행이고 직선 b 와는 사귀지 않는다.
   1) 직선 c 와 b 는 어기는 직선이라는것을 증명하여라.

2) $a \perp b$이면 $c \perp b$이라는것을 증명하여라.

3. 직3각형 ABC의 직각의 정점 B에서 △ABC평면에 수직선 BD를 그었다. △ABD, △BCD, △ABC의 면적이 각각 S_1, S_2, S_3일 때 △ACD의 면적을 구하여라.

4. 1) PC는 △ABC가 놓여있는 평면에 수직이고 $\angle A = 90°$이다. 점 D는 AB의 한 점이며 PA, PD, PB가 평면 ABC와 각각 60°, 45°, 30°의 각을 이룬다. 이때 점 D가 AB의 가운데점이라는것을 증명하여라.

   2) DE⊥평면 ADC이고 EA, EB, EC가 각각 평면 ADC와 이루는 각이 30°, 45°, 60°이다. AB=BC=3일 때 DE의 길이를 구하여라.

5. 평면의 거리가 a인 두 점 A, B에서 서로 평행인 두 빗선을 긋되 그 평면과 이루는 뾰족각이 α가 되도록 하였다. 두 빗선의 평면에로의 사영거리가 b라고 하면 두 빗선사이의 거리 d를 구하여라.

6. 평면 SAB와 SAC, SBC가 둘씩 서로 수직이고 한 점 S와 사귄다. 평면 P와 이 3개 평면이 서로 사귀여 생긴 자름면을 △ABC라고 한다. 점 S를 지나 평면 P에 수직선을 긋고 그 밑점을 O라고 하면 △SBC의 면적은 △ABC의 면적과 △OBC의 면적의 비례가운데마디이라는것을 증명하여라.

7. 3각기둥 $ABC-A_1B_1C_1$에서 밑면은 변의 길이가 a인 바른3각형이다. 또한 AA_1와 AB, AC가 이루는 각은 모두 60°이고 $AA_1 = A_1B = A_1C$이다. 이 3각기둥의 옆면적을 구하여라.

8. 바른3각뿔대 $ABC-A_1B_1C_1$에서 옆면과 아래밑면이 이루는 2면각은 60°이고 아래밑면의 변의 길이는 10, 걸면적은 $60\sqrt{3}$일 때 웃밑면의 변의 길이를 구하여라.

9. 빗3각기둥 $ABC-A_1B_1C_1$의 높이가 10cm이고 밑면은 변의 길이가 4cm인 바른3각형이다. 4각뿔 $A-BCC_1B_1$의 체적을 구하여라.

10. 4각뿔 S−ABCD에서 $\angle DAB = \angle ABC = 90°$, SA⊥평면 ABCD, $SA = AB = BC = a$, $AD = 2a$이다.

    1) SC와 밑면 ABCD가 사귀는 각을 구하여라.

    2) 점 A로부터 평면 SCD까지의 거리를 구하여라.

    3) 직선 SD와 AC가 이루는 각을 구하여라.

    4) 2면각 A−SD−C의 크기를 구하여라.

11. 바른6각뿔 P−ABCDEF에서 △PCF는 바른3각형이고 그의 면적은 S이다. 이 각뿔의 걸면적을 구하여라.

12. 3각뿔의 밑면은 변의 길이가 13, 14, 15인 3각형이고 이 각뿔의 세 옆모서리는 둘씩 서로 소이다. 이 3각뿔의 체적과 정점으로부터 밑면까지의 거리를 구하여라.

3) 자체시험문제

- 선택문제

1. 공간에서 3개 평면이 둘씩 서로 사귄다. 그것들은 (　)이다.
   A. 반드시 한 점에서 서로 사귄다.
   B. 2개의 사귐선을 가지는것은 꼭 불가능하다.
   C. 반드시 한개의 직선에서 서로 사귄다.
   D. 반드시 3개의 평행직선들과 사귄다.
2. 바른4각형의 한 변의 길이는 a이고 한 변이 평면 M에 놓인다. 바른4각형이 놓인 평면과 평면 M이 이루는 2면각의 크기는 α이다. 바른4각형의 평면 M에로의 사영의 면적은 (　)이다.
   A. $a^2\cos\alpha$　　B. $a^2\sin\alpha$　　C. $a^2\sec\alpha$　　D. $a^2\mathrm{cosec}\alpha$
3. AB와 CD는 어기는 두 선분이다. AC＝BC, AD＝BD일 때 AB와 CD가 사귀는 각은 (　)이다.
   A. 90°　　B. 60°　　C. 30°　　D. 확정할수 없다.
4. 직3각형에서 직각의 2등분선을 지나는 한 평면이 그 3각형이 놓여있는 평면과 각 α를 이룬다. 이때 한 직각변과 그 평면이 이루는 각은 (　)이다.
   A. 45°　　B. $\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}$
   C. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$　　D. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right)$
5. M＝{바른4각기둥}, N＝{직6면체}, P＝{직4각기둥}, a＝{바른6면체}일 때 이 모임들사이의 관계는 (　)이다.
   A. Q⊃M⊃N⊃P　　B. Q⊂M⊂N⊂P
   C. Q⊃N⊃M⊃P　　D. Q⊂N⊂M⊂P
6. 평행6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 4면체 $A_1B_1C_1D_1$와 평행6면체의 체적의 비는 (　)이다.
   A. 1 : 3　　B. 1 : 4　　C. 1 : 6　　D. 1 : 8
7. 바른3각뿔대 ABC－DEF의 웃, 아래밑면의 변의 길이의 비는 1 : 2이다. DC, DB, CB를 맺고 3개의 각뿔로 자를 때 V_{C-DEF}, V_{E-BCD}, V_{D-ABC}의 비는 (　)이다.
   A. 1 : 2 : 4　　B. 2 : 3 : 4　　C. 1 : 3 : 4　　D. 1 : 2 : 3

– 빈칸채우기문제

8. 직6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 AB＝4cm, AD＝3cm, AA_1＝2cm 일 때 AC와 B_1C_1사이의 거리＝____
9. 평면밖의 한 점 D로부터 평면에 수직선분 DA와 빗선분 DB, DC를 그으면 DA＝a, ∠BDA＝∠CDA＝60°, ∠BDC＝∠BDC＝120° 이다. 이때 BC＝____
10. 2면각안의 한 점으로부터 2면각의 두 변까지의 거리가 각각 a, $2a$이고 모서리까지의 거리가 $4a$이다. 이 2면각의 크기는 ____
11. 직3각형 ABC의 직각의 정점이 평면 M에 있고 빗변 BC의 길이는 a이며 평면 M에 평행이다. AB와 AC가 평면 M과 사귀는 각이 각각 α, β일 때 BC와 M사이의 거리는 ____
12. 평면 M에 선분 AB＝a가 있다. AC와 BD는 평면의 두쪽의 선분인데 길이는 모두 b이고 AC는 M에 수직이며 BD는 AB에 수직이고 평면 M과는 30°의 각을 이루고있다. 두 점 C, D사이의 거리는 ____
13. 4각뿔 P－ABCD에서 PA는 밑면에 수직이고 밑면은 한개의 직4각형이다. 이때 PA＝4, AB＝3, AD＝5라고 하면 두 옆면 PAD와 PBC가 이루는 2면각은 ____와 같다.
14. 직6면체의 한 변, 밑면의 대각선, 높이와의 비가 8 : 7 : 3이고 걸면적이 808cm^2일 때 직6면체의 체적은 ____와 같다.
15. 밑면은 변의 길이가 5인 바른3각형모양의 3각기둥에서 한개의 옆모서리와 밑면인 3각형의 두 변이 이루는 각은 모두 45°이고 옆모서리의 길이가 4라고 하면 3각기둥의 옆면적은 ____
16. 3각뿔 P－ABC에서 PA⊥BC, PA＝a, BC＝b이고 EF⊥PA, EF⊥BC, EF＝h이면 3각뿔의 체적은 ____

– 해답문제

17. 한 직선과 한 2면각의 두 평면이 사귈 때 두 사귐점으로부터 2면각의 공통모서리까지의 거리가 서로 같으면 이 직선과 두 평면의 사귐각도 서로 같다는것을 증명하여라.
18. 공간4각형 ABCD에서 AB⊥CD, AD⊥BC일 때

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=BC^2+AD^2$$

임을 증명하여라.
19. 직6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 AA_1＝AD＝2, AB＝3이다. 점 E가 선분 AB의 어느 위치에 있을 때 평면 A_1DE⊥평면 B_1CE인가?
20. 각뿔의 밑면은 변의 길이가 36cm, 20cm이고 면적이 36cm^2인 평행4변형이며 높이는 12cm이고 밑면의 두 대각선의 사귐점을 지난다. 이 각뿔의 옆면적을 구하여라.

21. 3각뿔 A－BCD에서 AB＝AC＝AD＝BC＝CD＝1, BD＝$\sqrt{2}$ 이다.

1) $V_{A\text{-}BCD}$ 를 구하여라.

2) 옆면 ACD와 밑면 BCD가 이루는 2면각의 크기를 구하여라.

22. 3각뿔 V－ABC에서 VA＝VB＝AC＝BC, AB＝$2a$, ∠AVB＝90° 이고 D는 AB의 점이고 2면각 V－ABC의 평면각은 30°이다.

1) 평면 VAB⊥평면VDC임을 증명하여라.

2) 3각뿔 V－ABC의 체적을 구하여라.

23. 평면 ABC⊥평면 BCD, ∠CAB＝90°, BC＝2AC＝8, AD⊥BC이고 AD와 평면 BCD는 30°의 각을 이룬다.

1) 2면각 A－CDB의 크기를 구하여라.

2) 3각뿔 A－BCD의 체적을 구하여라.

3) 어기는 두 직선 AB와 CD가 이루는 각을 구하여라.

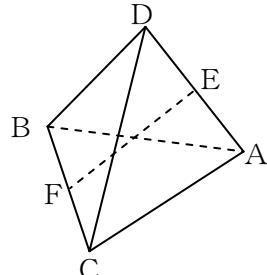



그림 10－20

11. 벡토르와 도형의 방정식

1) 문제풀이방법

례 1. 점 D, E, F가 △ABC의 세 변의 가운데점일 때

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$$

임을 증명하여라.

(증명) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ ⇒

$$\left.\begin{array}{l} 2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB} \\ 2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC},\quad 2\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CP}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$$

G가 △ABC의 무게중심이면

$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0},\ \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$$

례 2. D, E가 △ABC의 변 AB, BC의 가운데점이고 CD를 연장하여 DM=CD 되는 점을 M, BE를 연장하여 NE=BE 되는 점 E를 찍으면 M, A, N은 한 직선에 놓인다는것을 증명하여라.

(증명) △AMC에서 D는 MC의 가운데점이므로

$\therefore\ 2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}$

점 D가 AB의 가운데점이므로 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}$ ⇒

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AN}$$

$\left\{\begin{array}{l} AM\ /\!/ AN \\ AM\cap AN=A \end{array}\right.$ ⇒ $\overrightarrow{AM}$ 과 $\overrightarrow{AN}$은 한 직선에 놓인다.

례 3. $P(3\cos\alpha,\ 3\sin\alpha)$, $Q(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$가 주어지고 $\alpha\in[0, 2\pi)$, $\theta\in[0, 2\pi)$ 일 때 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 의 값범위를 구하여라.

(풀이) 조건으로부터

$$\overrightarrow{OP}=\{3\cos\alpha,\ 3\sin\alpha\},\quad \overrightarrow{OQ}=\{2\cos\theta,\ 2\sin\theta\}$$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ 이므로

$$\left\|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right\| \le \left|\vec{a} - \vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$ 로부터

$$\left\|\overrightarrow{OQ}\right| - \left|\overrightarrow{OP}\right\| \le \left|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right| \le \left|\overrightarrow{OQ}\right| + \left|\overrightarrow{OP}\right|$$

$\therefore\ 1 \le \left|\overrightarrow{PQ}\right| \le 5$

례 4. 바른3각형 ABC의 정점 A에 대응하는 복소수는 2이고 그의 중심에 대응하는 복소수는 $1+\frac{2}{3}i$ 이다. 이 3각형의 다른 두 정점의 대응하는 복소수를 구하여라.(그림 11－1)

(풀이) 그림에서 $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}$ 이다.

$\overrightarrow{GA}$ 에 대응하는 복소수는

$$2+\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{3}i\right) = 1-\frac{2}{3}\sqrt{3}i$$

중심 G와 바른3각형의 매 정점을 련결하면

$$\angle AGB = \angle BGC = \angle CGA = 120^\circ$$

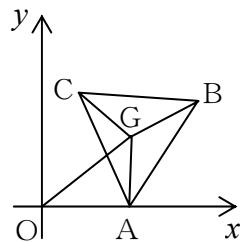



그림 11－1

또한 $\left|\overrightarrow{GC}\right| = \left|\overrightarrow{GA}\right| = \left|\overrightarrow{GB}\right|$

$\therefore\ \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA}(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$

즉 $\overrightarrow{GB}$ 에 대응하는 복소수는

$$\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{3}i\right)\cdot(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = \frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}i$$

같은 방법으로 $\overrightarrow{GC}$ 에 대응하는 복소수는

$$\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{3}i\right)\cdot(\cos(-120^\circ) + i\sin(-120^\circ)) = -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}$ 이므로 $\overrightarrow{OB}$ 에 대응하는 복소수는

$$\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{3}i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\sqrt{3}i\right) = \frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i$$

마찬가지로

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$$

이므로 $\overrightarrow{OC}$ 에 대응하는 복소수는 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 이다.

따라서 점 B의 대응하는 복소수는 $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i$ 이다.

례 5. △ABC에서

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

임을 증명하여라.

(풀이) AB가 가장 짧은 변이라고 하자.

AC, BC에서 점 P, Q를 잡되 AP＝BQ＝AB 되게 하면

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}$$

$$\overrightarrow{PQ}^2=\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BQ}^2+2\left(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BQ}\right)$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos(\pi-A)=-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cos A$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cos B$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BQ}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cos C$$

$$\overrightarrow{PQ}^2=3\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2(\cos A+\cos B+\cos C)\geq 0$$

$$\therefore\ \cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

례 6. 어기는 두 직선 a, b 가 이루는 각은 θ 이고 그의 공통수직선분 AB의 길이는 d, 점 E, F가 각각 직선 a, b 에 있고 AE＝m, BF＝n 일 때 EF의 길이를 구하여라.

(풀이) 그림 11－2와 같이 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}$ 를 잡자.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=d,\quad \left|\overrightarrow{AE}\right|=m,\quad \left|\overrightarrow{BF}\right|=n$$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BF}$ 이므로 $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BF}$ 가 이루는 각은 θ 또는 $\pi-\theta$

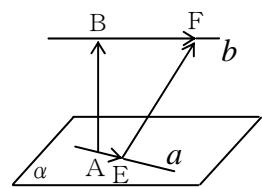



그림 11－2

$$\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

$$\left|\overrightarrow{EF}\right|^2 = \overrightarrow{EF}^2 = \left(-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\right)^2$$

$$= \overrightarrow{AE}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BF}^2 - 2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$$

$$= \left|\overrightarrow{AE}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BF}\right|^2 - 2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$$

$$\left|\overrightarrow{EF}\right| =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{d^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta} & \left(\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BF}\text{가 이루는 각이 }\theta\text{ 일 때}\right) \\ \sqrt{d^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos\theta} & \left(\overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{BF}\text{가 이루는 각이 }\pi-\theta\text{ 일 때}\right) \end{cases}$$

례 7. 두 벡토르 $\vec{a} = \{2,\ 1,\ \alpha\}$, $\vec{b} = \{3,\ \beta,\ 1\}$이 주어졌다. 두 벡토르 $\vec{P} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{Q} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$가 공선이기 위한 α, β의 값을 구하여라.

(풀이) $\vec{P} = \vec{a} + 2\vec{b} = \{2,\ 1,\ \alpha\} + 2\{3,\ \beta,\ 1\}$

$$= \{2,\ 1,\ \alpha\} + \{6,\ 2\beta,\ 2\}$$

$$= \{8,\ 1+2\beta,\ 2+\alpha\}$$

$$\vec{Q} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \left\{2,\ \beta - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$\vec{P} \parallel \vec{Q} \Leftrightarrow \frac{8}{2} = \frac{1+2\beta}{\beta - \frac{1}{2}} = \frac{\alpha+2}{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$\therefore\ \alpha = \frac{2}{3},\ \beta = \frac{3}{2}$$

례 8. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ 의 길이와 방향코시누스 $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ 및 $\vec{a}$ 방향의 단위벡토르 $\overrightarrow{e_a}$ 를 구하여라.

(풀이) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$ 에서

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{X}}{|\vec{a}|}=\frac{3}{13},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{Y}}{|\vec{a}|}=\frac{4}{13},\quad \cos\gamma=\frac{\mathrm{Y}}{|\vec{a}|}=-\frac{12}{13}$$

$$\vec{e_a}=\frac{3\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{k}}{13}=\frac{3}{13}\vec{i}+\frac{4}{13}\vec{j}-\frac{12}{13}\vec{k}$$

례 9. 벡토르 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{j}-\vec{k}$ 에 각각 수직이고 벡토르 $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ 에 관한 사영이 1로 되는 벡토르 $\vec{l}$ 을 구하여라.

(풀이) $\vec{l}=\{x,\ y,\ z\}$라고 하면

$$\vec{a}\perp\vec{l}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{b}\perp\vec{l}\Leftrightarrow\vec{b}\cdot\vec{l}=0$$

에 의하여 2개의 관계식 $x+z=0,\ 2y-z=0$이 얻어진다.

사영 $_{\vec{l}}=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{l}}{|\vec{c}|}=\dfrac{x+2y+2z}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1$ 　　　즉 $x+2y+2z=3$

$$\begin{cases}x+z=0\\2y-z=0\\x+2y+2z=3\end{cases}$$

을 풀면 $x=-\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{3}{4},\ z=\dfrac{3}{2}$

$$\therefore\ \vec{l}=\left\{-\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{2}\right\}=-\frac{3}{2}\vec{l}+\frac{3}{4}\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{k}$$

례 10. 세 점 A=(1, 2, 0), B=(3, 0. 3), C=(5, 2, 6)을 정점으로 가지는 △ABC의 면적과 점 A에서 그은 3각형의 높이를 구하여라.

(풀이) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\{2,-2,\ ,-3\},\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\{4,\ 0,\ 6\}$

$$\mathrm{S}_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\frac{1}{2}\times 28=14 \text{ (면적단위)}$$

$\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{ABC}}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right\|\cdot h=14$ 이므로 $h=\frac{28}{\mathrm{BC}}$

그런데 $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\left|\{5-2,\ 2-0,\ 6+3\}\right|=\sqrt{3^2+2^2+9^2}=\sqrt{94}$

$\therefore\ \ h=\frac{28}{\sqrt{94}}$

례 11. S(−5, −4, 8), A(2, 3, 1), B(4, 1, −2), C(6, 3, 7)을 정점들로 가지는 3각뿔 SABC의 정점 S에서 밑면 ABC에 그은 높이를 구하여라.

(풀이) $\mathrm{V}_{3\text{각뿔}}=\frac{1}{3}\cdot \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{ABC}}\cdot h,\ \mathrm{V}_{3\text{각뿔}}=\frac{1}{6}\mathrm{V}_{6\text{면체}},$

$$\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{ABC}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

$$\therefore\ \ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cdot h=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{\mathrm{SA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right)\right|$$

$$h=\frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{SA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}$$

그런데 $\overrightarrow{\mathrm{SA}}$ ={7, 7, −7}, $\overrightarrow{\mathrm{SB}}$ ={9, 5, −10}, $\overrightarrow{\mathrm{SC}}$ ={11, 7, −1}, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ={2, −2, −3}, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ={4, 0, 6}이므로

$$h=\frac{\left(\overrightarrow{\mathrm{SA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SC}}\right)}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\frac{\begin{vmatrix}7 & 7 & -7\\ 9 & 5 & -10\\ 11 & 7 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}}=\frac{89}{\sqrt{688}}=\frac{89}{4\sqrt{43}}$$

례 12. 점 (0, −1)을 지나는 직선 l 을 평행인 두 직선 $l_1: 2x+y-6=0$ 과 $l_2: 4x+2y-5=0$ 이 끊어내는 선분의 길이는 $\frac{7}{2}$ 이다. 직선 l 의 방정식을 구하여라.

(풀이) 그림 11－3에서 두 평행직선 l_1, l_2 사이의 거리는

그림 11－3

$$d=\frac{\left|6-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$$

$$\sin\theta=\frac{\frac{7\sqrt{5}}{10}}{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \tan\theta=\frac{1}{2}$$

l의 경사도가 k라고 하면

$$\left|\frac{k+2}{1-2k}\right|=\frac{1}{2}$$

$\frac{k+2}{1-2k}=\pm\frac{1}{2},\ k_1=-\frac{3}{4},\ k_2$는 존재하지 않는다.

l의 방정식은 $x=0$ 또는 $3x+4y+4=0$

례 13. 직선 $l:2x+y-1=0$이 △ABC에서 아낙각 C의 2등분선이고 A(1, 2), B(－1, －1)일 때 점 C(x, y)를 구하여라.

(풀이) 직선 l, AC, BC의 경사도를 각각 k, k_1, k_2이라고 하면

$$k=-2,\ k_1=\frac{y-2}{x-1},\ k_2=\frac{y+1}{x+1}$$

l이 ∠C의 2등분선이므로

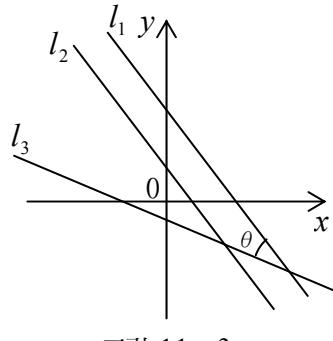
$$\frac{-2-\frac{y+1}{x+1}}{-2\cdot\frac{y+1}{x+1}}=\frac{\frac{y-2}{x-1}+2}{1-2\cdot\frac{y-2}{x-1}}\qquad(*)$$

방정식 $2x+y-1=0$과 식 (*)로부터

$$x=-\frac{13}{5},\ y=\frac{31}{5}$$

따라서 C의 자리표는 $\left(-\frac{13}{5},\ \frac{31}{5}\right)$이다.

례 14. 직선 $l:x+y=0$과 점 A(4, 2), B(0, 2)가 주어졌다.

1) 점 C가 l에 있을 때 $|\mathrm{AC}|+|\mathrm{BC}|$의 최소값을 구하고 점

C를 구하여라.

2) 점 D가 l에 있을 때 $|AD|-|BD|$의 최대값을 구하고 점 D를 구하여라.

3) 점 E가 l에 있을 때 $\angle AEB$의 최대값을 구하고 점 E를 구하여라.

(풀이) 1) 점 B의 직선 l에 관한 대칭점 B'의 자리표는 $B'(-2,\ 0)$
AB'와 l과의 사귐점을 C라고 하면

$$|AC|+|BC|=|AC|+|B'C|$$

점 A, C, B'가 한 직선에 있으므로 $|AB'|$가 최소값으로 된다.

AB'의 방정식은

$$y-0=\frac{2-0}{4+2}(x+2) \quad 즉 \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3} \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2} \qquad 즉 \quad C\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$|AC|+|BC|=|AB'|=\sqrt{(4+2)^2+(2+0)^2}=2\sqrt{10}$$

2) 점 A, B, D가 한 직선에 놓이지 않을 때 A, B, D는 3각형을 이룬다.

$$|AD|-|BD|<|AB|=4$$

$|AD|-|BD|$의 최대값을 취하면 A, B, D는 한 직선에 놓인다.

AB의 방정식은 $y=2$, $x+y=0$에 갈아넣으면 $x=2$
따라서 점 D의 자리표는 (−2, 2)

3) $|AE|^2+|BE|^2-|AB|^2=$

$$=(x-4)^2+(y-2)^2+x^2+(y-2)^2-4^2$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 8$$

$$= 2x^2 - 2(-x)^2 - 8x - 8(-x) + 8$$

$$= 4x^2 + 8 > 0$$

$$\cos \angle \mathrm{AEB} = \frac{|\mathrm{AE}|^2 + |\mathrm{BE}|^2 - |\mathrm{AB}|^2}{2|\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BE}|}$$

로부터 $\angle \mathrm{AEB}$는 뾰족각 혹은 0이다. (*)

$\angle \mathrm{AEB} = \theta$라고 하고 AE, BE의 방향결수를 k_1, k_2라고 하면

$$k_1 = \frac{y-2}{x+4}, \quad k_2 = \frac{y-2}{x+0}$$

$$\tan\theta = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{\frac{y-2}{x} - \frac{y-2}{x+4}}{1 + \frac{(y-2)^2}{x(x-4)}}\right|$$

$$= \left|\frac{-4y + 8}{x^2 + y^2 + 4 - 4x - 4y}\right|$$

$y = -x$를 웃식에 갈아넣으면

$$\tan\theta = \left|\frac{2(x+2)}{x^2 + 2}\right| = k$$

(*)을 리용하면

$$\frac{2(x+2)}{x^2 + 2} = k$$

$$kx^2 - 2x + 2k - 4 = 0 \qquad (**)$$

$k \neq 0$일 때 방정식 (**)은 풀이를 가진다.

$$\mathrm{D} = (-2)^2 - 4k(2k-4) = -4(2k^2 - 4k - 1) \geq 0$$

$$2k^2 - 4k - 1 \leq 0$$

$$\therefore \ k \in [1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \ 0) \cup (0, \ 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}]$$

이로부터 k의 최대값이 $1+\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때 방정식 (**)에 갈

아넣으면 이 방정식은 겹풀이 $x=\sqrt{6}-2$를 가진다.

E의 자리표는 $(\sqrt{6}-2, -(\sqrt{6}-2))$이고

$$\tan\angle AEB=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$$

즉 $\angle AEB$의 최대값은 $\arctan(1+\frac{\sqrt{6}}{2})$이다.

례 15. 점 $M(\frac{10}{3}, 1)$을 지나며 두 평행직선 $x+2y-1=0$과 $x+2y-3=0$을 끊어내는 선분의 가운데점이 반드시 $x-y-1=0$에 있게 되는 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 점 M을 지나는 직선 l이 두 평행직선을 끊어내는 선분 AB의 가운데점을 P라고 하면 P는 반드시 $x+2y-2=0$에 있게 된다.

조건으로부터 P는 $x-y-1=0$에 있으므로 점 P의 자리표는

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$$

을 만족한다. 즉 $P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

점 P와 M을 지나는 직선 l의 방정식은

$$\frac{y-1}{x-\frac{10}{3}}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{4}{3}-\frac{10}{3}}$$

$\therefore\ 3x-9y-1=0$

례 16. 둘레의 길이가 10인 △PBC에서 BC의 길이는 4이다. P가 움직이는 자리길의 방정식을 구하여라.

(풀이) 직각자리표계에서 B(−2, 0), C(2, 0)라고 하자.

$$PB+PC=6$$

즉 움직이는 점 P로부터 두 정점 B, C까지의 거리의 합은 6과 같으므로 P의 자리길은 타원이다.

$$2a=6,\ a=3,\ c=2$$
$$b^2=9-4=5$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

례 17. 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1$에서 한 점을 정하되 직선 $l:\ 3x-2y-16=0$까지의 거리가 가장 짧게 하여라. 그리고 이 거리를 구하여라.

(풀이) 직선의 방향결수는 $\frac{3}{2}$이고 방향결수가 $\frac{3}{2}$인 타원의 접선의 방정식(그림 11－4)은

$$y=\frac{3}{2}x\pm\sqrt{4\left(\frac{3}{2}\right)^2+7}=\frac{3}{2}x+4$$

그림에서 접선의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x-4$

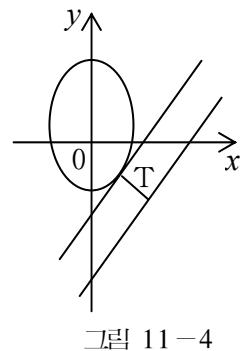
그림 11－4

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-4 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{7}=1 \end{cases}$$

$$x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{7}{4}$$

구하려는 점은 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$

점 $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{7}{4}\right)$로부터 l까지의 가장 짧은 거리는

$$\frac{\left|3\left(\frac{3}{2}\right)-2\left(-\frac{7}{4}\right)-16\right|}{\sqrt{13}}=\frac{8\sqrt{13}}{13}$$

례 18. 점 A(1, 2), B(3, 4)를 지나며 x축을 끊어내는 활줄의 길이가 6인 원의 방정식을 구하여라.

(풀이) $x^2+y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0$이라고 하면

$$\begin{cases}1^2+2^2+D+2E+F=0\\3^2+4^2+3D+4E+F=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}D+2E+F=-5 & ①\\3D+4E+F=-25 & ②\end{cases}$$

$y=0$이면 원의 방정식은 $x^2+Dx+F=0$

이 방정식의 두 풀이를 x_1, x_2라고 하면

$x_1-x_2=-D$, $x_1x_2=F$

원이 x축과 $(x_1,\ 0)$, $(x_2,\ 0)$에서 사귀므로

$$|x_1-x_2|=b$$

우의 량변을 2제곱하면

$$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=36$$

$$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=36$$

$$D^2-4F^2=36 \qquad ③$$

식 ①, ②, ③으로부터

$D_1=12$, $E_1=-22$, $F_1=27$

$D_2=-8$, $E_2=-3$, $F_2=7$

따라서 구하려는 원의 방정식은

$x^2+y^2+12x-22y+27=0$ 또는

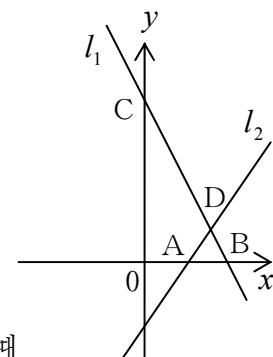
$x^2+y^2-8x-2y+7=0$

례 19. 직선 $l_1: 4x+3y-12=0$, $l_2: 3kx-2y-2=0$이 주어졌다. k가 어떤 값을 취할 때 l_1과 l_2, x축, y축으로 둘러싸인 4각형이 한개의 외접원을 가지겠는가? 그 원의 방정식을 구하여라.(그림 11－5)

그림 11－5

(풀이) 직선 l_1이 두 자리표축과의 사귐점은 B(3, 0), C(0, 4)이다.

직선 l_2는 점 (0, －1)을 지나며 이때 x축과 사귀는 점을 A라고 하자.

$l_1\perp l_2$일 때 4각형 OADC는 외접원을

가진다. 그리고 AC는 직경으로 된다.

$l_1 \cdot l_2 = -1$ 이므로

$$-\frac{4}{3} \cdot \frac{3k}{2} = -1 \qquad \therefore\ k = \frac{1}{2}$$

l_2 의 방정식은 $\frac{3}{2}x - 2y - 2 = 0$ 즉 $3x - 4y - 4 = 0$

점 A의 자리표는 $\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$

AC의 가운데점을 O' 라고 하면

$$O'_x = \frac{\frac{4}{3} + 0}{2} = \frac{2}{3},\ O'_y = \frac{0+4}{2} = 2,$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 4^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$$

따라서 원의 반경은 $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

따라서 구하려는 원의 방정식은 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{40}{9}$

례 20. 원 $(x-a)^2 + y^2 = 1$ 과 포물선 $y^2 = 2x$ 가 서로 사귈 때 사귐점밖의 접선이 서로 수직이 되는 a 의 값을 구하여라.

(풀이) 원과 포물선의 사귐점을 $A(x_0,\ y_0)$ 이라고 하자.

포물선 $y^2 = 2x$ 의 $(x_0,\ y_0)$ 밖에서 접선의 방정식은

$$y_0 y = x + x_0$$

이 접선은 이 점에서 그은 원의 접선과 수직이므로 이 접선은 반드시 중심 $O_1(0,\ 0)$ 을 지난다.

$\therefore\ y_0 \times 0 = x_0 + a$ 즉 $x_0 = -a$

즉 A의 자리표는 $(-a,\ y_0)$

$$\begin{cases} y_0^2 = -2a \\ (-a-a)^2 + y_0^2 = 1 \end{cases}$$

$\therefore\ 4a^2 - 2a - 1 = 0$

$\therefore\ a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

$x>0$이므로 $a<0,\ a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

례 21. 점 $M_0(2,\ -3,\ 5)$를 지나며 두 평면 $2x+y-2z+1=0$, $x+y+z-5=0$ 의 사귐선에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

(풀이) 점 $M_0(2,\ -3,\ 5)$를 지나는 평면의 방정식은

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-5)=0 \qquad ①$$

평면 ①은 주어진 두 평면과 각각 수직이므로

$$\begin{cases}2\cdot A+1\cdot B+(-2)\cdot C=0\\ 1\cdot A+1\cdot B+1\cdot C=0\end{cases} \Rightarrow A=3B,\ B=-4C \qquad ②$$

식 ②를 식 ①에 넣으면

$$3(x-2)-4(y+3)+(z-5)=0$$

$\therefore\ 3x-4y+z-23=0$

례 22. 점 $M_0(2,\ -3,\ 1)$을 지나며 두 벡토르 $\vec{a}=\{-3,2,-1\}$, $\vec{b}=\{1,\ 2,\ 3\}$에 평행인 평면의 방정식을 구하여라.

(풀이) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\{8,\ 8,\ -8\}$

구하려는 평면의 방정식은 점 $M_0(2,\ -3,\ 1)$을 지나며 $\vec{a}\times\vec{b}$에 수직이므로

$$8(x-2)+8(y+3)-8(z-1)=0$$

즉 $x+y-z+2=0$

례 23. 점 $M_0(1,\ -3,\ 5)$를 지나며 두 평면 $3x-y+2z-7=0$, $x+3y-2z+3=0$의 사귐선에 평행인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 평면 $3x-y+2z-7=0$ 의 법선벡토르는 $n_{11}=\{3,-1,\ 2\}$, 평면 $x+3y-2z+3=0$ 의 법선벡토르는 $n_{12}=\{1,3,\ -2\}$이므로 이 두 평면의 사귐선방향의 벡토르 $\vec{l}$ 은

$$\vec{l}=\overrightarrow{n_{11}}\times\overrightarrow{n_{12}}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=-4\vec{i}+8\vec{j}+10\vec{k}$$

따라서 점 $M_0(1, -3, 5)$를 지나며 $\vec{l}=\{-4, 8, 10\}$에 평행인 직선은 $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-5}{10}$이다. 즉

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}$$

례 24. 두 직선

$$l_1 : \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$$

$$l_2 : \frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$$

와 사귀며 직선

$$l_3 : \frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{1}$$

에 평행인 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 직선 l_1을 지나면서 l_3에 평행인 평면 M_1을 구하고 그 방정식을 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$이라고 하자.

또한 l_2을 지나고 l_3에 평행인 평면 M_2의 방정식을 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$이라고 하면 l_1, l_2와 사귀면서 l_3에 평행인 직선의 방정식은 평면 M_1, M_2의 사귐선

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

이다. 이것을 구하면 l_1을 지나고 l_3에 평행인 평면 M_1은

$$\begin{vmatrix}x+3 & y-5 & z\\ 2 & 3 & 1\\ 8 & 7 & 1\end{vmatrix}=0$$

또는 $2x-3y+5z+21=0$

직선 l_2를 지나면서 l_3에 평행인 평면 M_2는

$$\begin{vmatrix} x-10 & y+7 & z \\ 5 & 4 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

또는 $x-y-z-17=0$

따라서 구하려는 직선은

$$\begin{cases} 2x-3y+5z+21=0 \\ x-y-z-17=0 \end{cases}$$

례 25. 직선 $\begin{cases} x-5z+3=0 \\ 4x-y=6 \end{cases}$ 에 놓이면서 두 평면 $3x+3z-5=0$, $x+4y+z=1$까지의 거리가 같은 점을 구하여라.

(풀이) 주어진 직선을 보조변수의 방정식으로 표시하면

$$x=1+t,\ y=4t-2,\ z=4+t$$

이 직선의 점 $(1+t,\ 4t-2,\ 4+t)$ 로부터 매개 평면까지의 거리가 같아야 하므로

$$\left|\frac{10+65}{\sqrt{8}}\right| = \left|\frac{18t-4}{18}\right|$$

t를 구하면 $(10+6t)^2 = (18t-4)^2$

$$t_1 = -\frac{1}{4},\ t_2 = \frac{7}{6}$$

이 값을 보조변수방정식에 넣어 구하려는 점

$$\mathrm{M}_0\left(\frac{3}{4},\ -3,\ \frac{15}{4}\right),\ \mathrm{M}_1\left(\frac{13}{6},\ \frac{8}{3},\ \frac{31}{6}\right)$$

을 얻는다.

례 26. 직선 $l: \dfrac{x-7}{-2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{4}$ 과 평면 $\alpha:\ x-2y+z=6$ 이 있다. 이 직선을 축으로 하는 반경 $2\sqrt{5}$ 인 원기둥을 평면 α로 자르는 경우 그의 잘라진 자리를 표시하는 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 직선 l의 방향벡토르 $\{-2, 1, 4\}$와 평면 α의 법선벡토르 $\{1, -2, 1\}$의 스칼라적이

$$(-2)\times 1+1\times(-2)+4\times 1=0$$

이므로 l과 α는 평행이다.

점 $(7,\ -2,\ 1)$을 지나고 l에 수직인 평면을 α'라고 하면 α'의 방정식은

$$-2(x-7)+(y-2)+4(z-1)=0$$

즉 $-2x+y+4z=-12$

이 평면 α'와 α와의 사귐선에 있는 점 $(7,\ -2,\ 1)$에서의 거리가 $2\sqrt{5}$인 점을 $a,\ b,\ c$라고 하면

$$\begin{cases} -2a+b+4c=-12 \\ a-2b+c=6 \\ (a-7)^2+(b+2)^2+(c-1)^2=20 \end{cases}$$

이 식을 풀면 $(a,\ b,\ c)=(9,\ 2,\ 1)$ 또는 $(3,\ -2,\ -1)$

구하려는 직선은 우의 두 점을 지나며 직선 l에 평행인 직선 $\frac{x-9}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{4}$과 $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{4}$이다.

례 27. 타원면 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$과 평면 $x+4z-4=0$과의 사귐선을 자리표평면 Oxy에 사영한 곡선을 구하여라.

(풀이) 평면의 방정식에서 z를 구하면

$$z=\frac{4-x}{4}$$

이것을 긴원의 방정식에 갈아넣으면

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\left(1-\frac{x}{4}\right)^2-1=0$$

이것은 z축에 평행인 기둥면이다.

따라서 이 기둥면과 Oxy평면 즉 $z=0$과의 사귐선

$$\begin{cases} x^2+2y^2-4x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

이 구하려는 곡선이다.

2) 련습문제

－ 선택문제

1. 점 A, B의 자리표가 각각 (2, －2), (4, 3)이다. 벡토르 $\vec{\mathrm{P}}$ 가 $\{2k-1,\ 7\}$이고 $\vec{\mathrm{P}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{AB}}$일 때 k의 값은 (　)이다.

   A. $-\dfrac{9}{10}$　　B. $\dfrac{9}{10}$　　C. $-\dfrac{19}{10}$　　D. $\dfrac{19}{10}$

2. $\vec{n}=\{a,\ b\}$이고 $\vec{n}$과 $\vec{m}$는 수직이며 $|\vec{n}|=|\vec{m}|$일 때 $\vec{m}$는 (　)이다.

   A. $\{b,\ -a\}$　　B. $\{a,\ -b\}$

   C. $\{-a,\ b\}$ 또는 $\{a,\ -b\}$　　D. $\{b,\ -a\}$ 또는 $\{-b,\ a\}$

3. 령 아닌 벡토르 $\vec{a},\ \vec{b}$가 서로 수직이면서 다음의 식들가운데서 반드시 성립하는것은 (　)이다.

   A. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$　　B. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

   C. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$　　D. $|\vec{a}+\vec{b}|=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

4. 다음의 같기식

   1) $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$　　2) $0\vec{a}=0$　　3) $\vec{0}\vec{a}=\vec{0}$

   4) $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\overrightarrow{a^2}\cdot\overrightarrow{b^2}$　　5) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

   들가운데서 정확한 개수는 (　)이다.

   A. 0개　　B. 1개　　C. 2개　　D. 적어도 2개

－ 해답문제

5. 세 점 A(－3, －7, －5), B(0, －1, －2), C(2, 3, 0)은 한 직선에 있는가?

6. $\vec{a}=\{0,\ 0,\ -2\},\ \vec{b}=\{9,\ -7,\ 5\},\ \vec{c}=\{3,\ 1,\ 2\}$일 때 벡토르 $3\vec{a}-2\vec{b}+5\vec{c}$의 길이를 구하여라.

7. 원점에 있는 질점에 두 힘 $\overrightarrow{\mathrm{F}_1}=\{1,-1,1\},\ \overrightarrow{\mathrm{F}_2}=\{2,1,3\}$이 작용하여 직선에 따라 점 A(2, －1, －1)까지 이동하였다고 할 때 수행된 일을 구하여라.

8. $\vec{p},\ \vec{q}$는 단위벡토르들이고 그사이의 각은 $60°$일 때

$$\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q},\ \vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$$

를 두 변으로 가지는 평행4변형의 면적을 구하여라.

9. $\vec{a}=\{3,\ -1,\ 2\},\ \vec{b}=\{1,\ 2,\ -1\}$ 일 때 벡토르적 $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ 를 구하여라.

10. 네 점 S(1, 1, 2), A(2, 3, −1), B(2, −2, 4), C(−1, 1, 3)을 정점으로 하는 4면체 S−ABC의 체적을 구하여라.

11. 직2등변3각형 ABC의 빗변이 놓이는 직선의 방정식이 $3x-y+2=0$ 이다. 직각의 정점 A는 $\left(\frac{14}{5},\ \frac{2}{5}\right)$일 때 두 직각변이 놓이는 직선의 방정식을 구하고 그의 면적을 구하여라.

12. 세 직선 $x-2y-1=0,\ 2x+ky-3=0,\ 3kx+4y-5=0$ 이 한 점에서 사귄다. 이때 k 의 값을 구하여라.

13. 두 점 A(4, 1), B(6, −3)이 주어졌다. x 축에 한 점 P를 정하되 AP^2+BP^2이 최소로 되도록 하여라.

14. D, E, F는 각각 △ABC의 세 변 BC, CA, AB의 내분점이고 비값은 모두 $\lambda(>0)$ 이다. △ABC와 △DEF는 서로 같은 무게중심을 가진다는것을 증명하여라.

15. 원점과 점 M(1, 3)을 각각 지나는 두 평행직선사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이다. 이 직선들의 방정식을 구하여라.

16. 점 (3, 1)을 지나는 한 직선이 두 평행직선 $x+2y-1=0$ 과 $x+2y-3=0$ 을 잘라낸 선분의 가운데점이 직선 $x-y-1=0$ 에 놓인다. 이 직선의 방정식을 구하여라.

17. 주어진 점 A(8, 6)을 지나는 4개 직선이 있고 그것들이 차례로 이루는 각의 비가 1:2:3:4이다. 두번째 직선의 방정식이 $3x-4y=0$ 일 때 나머지 세 직선의 방정식을 구하여라.

18. k 가 어떤 값을 취할 때 포물선 $y=x^2+k$ 와 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 이 4개의 서로 다른 사귐점을 가지는가? 이때 네 점은 한 원둘레에 놓인다는것을 증명하여라.

19. 쌍곡선이 점 $P\left(2,\ 3\sqrt{2}\right)$ 를 지나며 그의 점근선이 $y=\pm\frac{3}{2}x$ 이다. 쌍곡선의 방정식을 구하여라.

20. $z_1,\ z_2$ 는 복소수평면의 두개의 점이고 $z_1=z_2i+3$ 이다. z_2 가 곡선 $|z-5|-|z+5|=6$ 을 따라 움직일 때 복소수평면의 직각자리표

계에서 z_1의 자리길의 방정식을 구하여라.

21. 타원 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$의 초점은 F_1, F_2이고 포물선 $C_2: y^2=2px\ (p>0)$의 초점은 F_2이다. 곡선 C_1, C_2가 점 M에서 사귄다면(x축의 웃쪽에서) $\cos\angle MF_1F_2 \cdot \cos\angle MF_2F_1$의 값을 구하여라.

22. 점 $M_0(1, 0, 2)$, $A(4, 6, -3)$, $B(2, 6, -1)$이 주어졌다.
 1) 점 M_0을 지나며 $\overrightarrow{AB}$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.
 2) 점 B를 지나며 $\overrightarrow{AM}$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

23. 평면 $x+2y-3z+2=0$과 자리표평면들로 둘러싸인 4면체의 체적을 구하여라.

24. 3각형의 세 정점 $A(1, -2, -4)$, $B(8, 1, -3)$, $C(5, 1, -7)$이 주어졌다. 정점 B에서 맞은변에 그은 높이의 방정식을 구하여라.

25. 중심이 $(1, -2, 4)$이고 평면 $2x-y+2z-3=0$에 닿는 구면의 방정식을 구하여라.

3) 자체시험문제

– 선택문제

1. 두개의 령 아닌 벡토르 $\vec{a}, \vec{b}$가 $|\vec{a}|+|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$를 만족하면 다음의 식들가운데서 성립하는것은 ( )이다.

 A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

 C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ D. $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|<\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

2. 변의 길이가 1인 바른3각형 ABC에서 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$이면 $\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}+\vec{c}\vec{a}$는 ( )와 같다.

 A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. 0 D. 3

3. △ABC의 정점의 자리표가 $A(3, 4)$, $B(-2, -1)$, $C(4, 5)$이다. 점 D는 변 BC에 있고 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$이면 AD의 길이는 ( )이다.

A. $\frac{7}{2}\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

4. 다음의 4개 명제

1) 두 직선이 평행이면 경사도는 서로 같다.

2) 만일 두 직선이 서로 수직이면 그 경사도의 적은 반드시 −1이다.

3) 점 (1, 1)을 지나며 x축과 $30°$의 각을 이루는 직선의 방정식은 $\frac{y-1}{x-1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

4) x축에 수직인 직선은 반드시 y축과 평행이다.

가운데서 참명제의 개수는 (　)이다.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

5. 두 자리표축까지의 거리가 서로 같은 점 $(x,\ y)$의 모임은 (　)이다.

A. $\{(x,\ y)|x-y=0,\ x,\ y\in \mathrm{R}\}$

B. $\{(x,\ y)|x+y=0,\ x,\ y\in \mathrm{R}\}$

C. $\{(x,\ y)|x^2-y^2=0,\ x,\ y\in \mathrm{R}\}$

D. $\{(x,\ y)|x-y=0,\ x+y=0,\ x,\ y\in \mathrm{R}\}$

6. 직선 $x+y=0$에 관한 점 $(a,\ b)$의 대칭점의 자리표는 (　)이다.

A. $(a, -b)$　　B. $(-b, a)$　　C. $(a, -b)$　　D. $(-b, -a)$

7. 점 $P_1(-2,\ 4)$, $P_2(5,\ 3)$이 주어졌다. 점 P는 P_1P_2의 연장선에 있고 $|P_1P_2|=2|P_2P|$일 때 점 P의 자리표는 (　)이다.

A. $\left(\frac{18}{3}, \frac{10}{3}\right)$　B. $(9,\ 5)$　　C. (12, 2)　D. (−10, 2)

8. 쌍곡선의 두 기준선사이거리가 그의 모임점거리의 절반과 같다면 쌍곡선의 리심률은 (　)이다.

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. A, B, C가 다 옳지 않다.

9. 4개의 점 $(2,\ m)$, $(4,\ 1)$, $(5,\ 3+\sqrt{3})$, (6, 3)이 한 원둘레에 놓이면 m의 값범위는 (　)이다.

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

10. 포물선 $y=x^2-kx+2$와 x축이 늘 공통점을 가진다면 k가 취할 수 있는 값범위는 (　)이다.

A. $k\geq 2\sqrt{2}$　　　　B. $-2\sqrt{2}\leq k\leq 2\sqrt{2}$

C. $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right)\cup[2\sqrt{2}, +\infty)$　　D. $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2}, +\infty\right)$

－ 빈칸채우기문제

11. 령 아닌 벡토르 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ 를 만족시키면 $\vec{a}$ 와 $\vec{a}+\vec{b}$ 의 사이각은 _____

12. $\vec{a}=\{3, -2\}, \vec{b}=\{-4, -3\}, \vec{r}=\{-5, 2\}$ 이고 $\vec{r}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ 이면 $\vec{c}=$_____

13. 공간에서 세 점 A, B, C의 자리표가 각각 (0, 0, 2), (2, 2, 0), (－2, －4, －2)이다. 점 P가 Oxy평면에 있고 PA⊥AB, PA⊥AC이면 점 P의 자리표는 _____

14. 포물선 $y^2=16x$ 의 한 점 P로부터 x축까지의 거리가 12이고 초점이 F일 때 $|\mathrm{AB}|=$_____

15. 포물선 $y^2=4x$ 의 점 M(4, 1)을 지나는 한개 활줄 AB를 그었을 때 M이 AB의 가운데점으로 된다면 AB가 놓이는 직선의 방정식은 _____

－ 해답문제

16. 직6면체 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$에서 $|AD|=2$, $|AB|=3$, $|AA_1|=2$, E는 BC의 가운데점이다.

1) 어기는 두 직선 AD_1와 A_1E가 이루는 각의 크기를 구하여라.

2) $D_1F\perp AC$ 되게 긋고 밑점을 F라고 할 때 $\overrightarrow{D_1F}$ 의 자리표를 구하여라.

17. m 이 어떤 값일 때 직선 $\left(2m^2+m-3\right)x+\left(m^2-m\right)y-4m+1=0$ 이

1) y축을 잘라내는 점의 y자리표가 －1인가?(y단편이 －1인가.)

2) x축에 평행인가?

3) 직선 $2x-3y-5=0$ 에 평행인가?

4) $x-2y+6=0$ 과 이루는 각이 arctan3인가?

18. 직선 $2x+3y+3=0$ 이 주어졌을 때

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\geq 2\sqrt{5}$$

임을 증명하여라.

19. 점 A(－3, 2)를 지나는 직선 l 이 $3x-4y-1=0$ 과 B에서 사귀고 $3x+2y-13=0$ 과 C에서 사귀며 점 A가 선분 BC의 가운데점이라고 할 때 이 직선 l의 방정식을 구하여라.

20. 1) 방정식 $y^2 = |x| - 1$의 그라프를 그려라.

2) 그림 11－6과 같은 그라프의 방정식을 구하여라.

그림 11－6

21. 방정식 $x^2 \sin\alpha + y^2 \cos\alpha = 1$ $(\alpha \in [0,\ \pi])$ 이 주어졌다. 이때 서로 다른 α에 대응하는 방정식이 표시하는 곡선을 그려라.

22. 타원의 중심이 원점에 있고 초점이 자리표축에 있다. $e = 0.8$이고 한 준선의 방정식이 $y = -\dfrac{25}{4}$이다.

이 타원에 내접하는 가장 큰 직4각형의 면적을 구하여라.

23. 곡선 $|y+1|^2 = x + 1$에 있는 두 점이 직선 $y = a$에 관하여 대칭일 때 a의 범위를 구하여라.

24. 평행4변형의 두 변은 쌍곡선의 점근선에 있고 한 정점은 쌍곡선에 있다. 이 평행4변형의 면적은 상수이라는것을 증명하여라.

25. 평면에서 직선 l_1은 점 $\mathrm{A}(a,\ 0)$을 지나면서 이동하고 직선 l_2는 점 $\mathrm{B}(-a,\ 0)$을 지나면서 이동한다. 이 두 직선이 점 C에서 사귀며 $\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\pi}{4}$이다. 이때 △ABC의 무게중심 G의 자리길방정식을 구하고 그 자리길도형을 설명하여라.

26. 방정식 $2x + 3y - 4z + 20 = 0$을 주어진 점 $\mathrm{M}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$을 지나는 평면의 방정식모양으로 표시하여라.

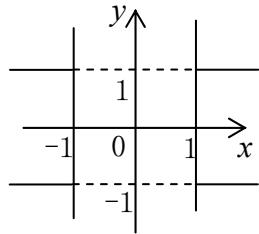
27. 두 점 (2, －15, 1), (3, 1, 2)를 지나며 평면 $3x - y - 4z = 0$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

28. 점 $\mathrm{M}_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$을 지나며 두 평면

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

의 사귐선에 평행인 직선의 방정식을 구하여라.

29. 직선 $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y}{12} = \dfrac{z-1}{-3}$과 평면 $6x - 3y + 2z = 0$ 사이의 각을 구하여라.

30. 구면 $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5y - 8 = 0$의 중심과 반경을 구하여라.

12. 확률과 통계

1) 문제풀이방법

례 1. 5개의 수자 1, 2, 3, 4, 5가운데서 임의로 3개 수자를 취하여 중복이 없는 3자리수를 만든다. 이때 얻어지는 수가 짝수일 확률을 구하여라.

(풀이) 중복이 없는 3자리수를 만들수 있는 사건의 총수는

$$N=A_5^3$$

얻어지는 수가 짝수일 사건의 수는

$$K=A_2^1 \cdot A_4^2$$

$$\therefore \ P(A)=\frac{K}{N}=\frac{A_2^1 \cdot A_4^2}{A_5^3}=\frac{2}{5}$$

례 2. $M=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$이라고 하고 임의의 $x, y \in M(x \neq y)$를 취하여 다음것을 구하여라.

1) $x+y$가 3의 배수일 확률

2) $x \cdot y$가 3의 배수일 확률

(풀이) $M_0=\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $n(M_0)=6$

$M_1=\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$, $n(M_1)=7$

$M_2=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$, $n(M_2)=7$

라고 하면 $M=M_0 \cup M_1 \cup M_2$

1) $x+y$가 3의 배수일 사건을 A라고 하면 임의의 한개 합 $x+y$의 가능한 기본사건의 총수는 $N=C_{20}^2$

$x+y$가 3의 배수 $\Leftrightarrow$ $x, y \in M_0$ 혹은 $x, y \in M_1$(또는 M_2)

$x, y \in M_2$(또는 M_1)

따라서 사건 A의 기본사건수 $K_A=C_6^2+C_7^1 \cdot C_7^1$

$$\therefore \ P(A)=\frac{K_A}{N}=\frac{C_6^2+C_7^1 \cdot C_7^1}{C_{20}^2}=\frac{32}{95}$$

2) $x \cdot y$가 3의 배수일 사건을 B라고 하자.

B의 나머지사건 $\overline{B}$ 《$x \cdot y$가 3의 배수가 아니다.》를 고려하면

$$N=C_{20}^2$$

$x \cdot y$가 3의 배수가 아니다 $\Leftrightarrow$ $x, y \in M_1 \cup M_2$

$\therefore\ K_{\overline{B}} = C_{14}^{2}$

$$\therefore\ P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{C_{14}^{2}}{C_{20}^{2}} = \frac{99}{190}$$

례 3. 붉은 공 6개와 푸른 공 5개가 들어있는 통에서 임의로 3개 공을 꺼냈을 때

1) 3개 공이 같은 색일 확률

2) 3개 공가운데서 두 공은 붉은색, 한 공은 푸른색일 확률

3) 3개 공가운데서 적어도 한 공이 붉은색일 확률

을 구하여라.

(풀이) 통에서 임의로 3개 공을 꺼내는 가능한 시행의 총수

$$N = C_{11}^{3}$$

1) 《임의로 3개 공을 꺼냈을 때 3개 공이 같은 색일 사건》을 A, 《임의로 3개 공을 꺼냈을 때 3개 공이 붉은색일 사건》을 A_1, 《임의로 3개 공을 꺼냈을 때 3개 공이 푸른색일 사건》을 A_2라고 하면

$$A = A_1 + A_2$$

즉 A_1과 A_2는 배반사건이다.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_6^3}{C_{11}^3} - \frac{C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{2}{11}$$

2) 《임의로 3개 공을 꺼냈을 때 두 공이 붉은색, 한 공이 푸른색일 사건》을 B라고 하면

$$P(B) = \frac{C_6^3 C_5^1}{C_{11}^3} = \frac{5}{11}$$

3) 《임의로 3개 공을 꺼냈을 때 적어도 한 공이 붉은색일 사건》을 C라고 하면 $\overline{C}$는 《임의로 3개 공을 꺼냈을 때 3개 공이 다 푸른색일 사건》을 표시한다.

$$\therefore\ P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{31}{33}$$

례 4. 붉은 공 6개와 흰 공 5개가 들어있는 통에서 임의로 하나씩 3개 공을 꺼낼 때 《붉》, 《흰》, 《붉》의 순서로 나올 확률을 구하여라.

(풀이) 통에서 임의로 하나씩 3개 공을 꺼낼 때 가능한 사건의 총

수는 $N=A_{11}^{3}$ 이다.

《하나씩 3개의 공을 꺼낼 때 순서가 〈붉〉, 〈흰〉, 〈붉〉 일 사건》을 A라고 하면 사건 A의 총수는

$$K=A_6^1 \cdot A_5^1 \cdot A_4^1$$

$$\therefore\ P(A)=\frac{K}{N}=\frac{A_6^1 \cdot A_5^1 \cdot A_4^1}{A_{11}^3}=\frac{5}{33}$$

례 5. 1부터 200까지 번호가 적혀있는 카드가 있다. 그가운데서 한장을 꺼낼 때 그 번호가 다음과 같을 확률을 구하여라.

1) 3과 5의 배수일 확률

2) 3 또는 5의 배수일 확률

3) 3의 배수이고 5의 배수가 아닌 확률

(풀이) 카드의 번호가 3, 5의 배수인 사건을 각각 A, B라고 하면

$$n(A)=66,\ n(B)=40$$

1) 3과 5의 배수인 사건은 $A\cap B$이다.

$n(A\cap B)$은 15의 배수인 개수이므로 $n(A\cap B)=13$

$$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{13}{200}$$

2) 3 또는 5의 배수인 사건은 $A\cup B$이므로

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{66}{200}+\frac{40}{200}-\frac{13}{200}=\frac{93}{200}$$

3) 3의 배수이고 5의 배수가 아닌 사건은 $A\cap \overline{B}$ 이므로

$$P(A\cap \overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{66}{200}-\frac{13}{200}=\frac{53}{200}$$

례 6. 1) 5명의 생일이 5개의 서로 다른 달에 있을 확률을 구하여라.

2) 5명의 생일이 2개 달에 있을 확률을 구하여라.

(풀이) 5명의 생일이 12달에 있게 될 사건의 총수는 $N=12^5$ 이다.

1) 《5명의 생일이 5개의 서로 다른 달에 있는 사건》을 A 라고 하면 A의 기본사건수는

$$K_A=A_{12}^{5}$$

$$\therefore\ P(A)=\frac{K_A}{N}=\frac{A_{12}^5}{12^5}\approx 0.382$$

2) 《5명의 생일이 2개 달에 있을 사건》을 B라고 하면 B의

기본사건수는

$$K_B = C_{12}^{2} \cdot \left(2^5 - 2\right)$$

$$\therefore\ P(B) = \frac{K_B}{N} = \frac{C_{12}^{2}\left(2^5 - 2\right)}{12^5} \approx 0.008$$

례 7. 사건 A, B에 대하여 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ 일 때 확률 $P(\overline{A} \cup \overline{B})$을 구하여라.

(풀이) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$ (*)

한편 $P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)$이므로 $A \cap B \neq \varnothing$이다.

따라서 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$로부터

$$A \cap B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{11}{60}$$

식 (*)로부터 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{49}{60}$

례 8. 주사위를 6번 던졌을 때 6이 4번이상 나올 확률을 구하여라.

(풀이) 6이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$, 나오지 않을 확률은 $\frac{5}{6}$, 4번이상 나올 사건은 6이 4번, 5번, 6번 나오는 사건들의 합이므로

$$C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_6^5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) + C_6^6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^6$$

$$= \frac{1}{6^6} \cdot \left(15 \times 5^2 + 6 \times 5 + 1\right) = \frac{203}{23328} = 0.009$$

례 9. 학생 20명의 수학학과성적이 다음의 표와 같다.

성적	100	95	88	84	80	78	74	68	62	58
학생수	1	1	2	4	2	3	2	2	2	1

이때 학생들의 수학성적의 평균값, 가운데값, 2제곱편차와 표준편차를 구하여라.

(풀이) $\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot (100 + 95 + 88 \times 2 + 84 \times 4 + 80 \times 2$

$+ 78 \times 3 + 74 \times 2 + 68 \times 2 + 62 \times 2 + 58) = 78.35$

$\xi = \frac{1}{2}(80+78) = 79$

$\sigma^2 = \frac{1}{20} \cdot (100^2 + 95^2 + 88^2 \times 2 + 84^2 \times 4 + 80^2 \times 2$

$+ 78^2 \times 3 + 74^2 \times 2 + 68^2 \times 2 + 62^2 \times 2 + 58^2) - \mu^2$

$= 113.3275$

$\sigma = 10.65$

례 10. 학생 40명이 푼 수학문제수를 조사하였는데 다음과 같다.

111	110	105	109	107	107	110	101
104	107	111	103	103	109	106	108
108	105	100	92	100	103	107	99
91	108	110	114	100	108	104	112
114	108	109	111	99	114	114	107

1) 이가운데서 4명의 학생들이 푼 문제수의 평균값, 2제곱편차, 가운데값을 구하여라.

2) 5개 급으로 나누어 빈도률분포표를 만들어라.

3) 빈도률기둥도표를 그려라.

(풀이) 1) $\bar{x} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} x_i = 106.2$

$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{40} x_i^2 - \bar{x} = 28.26$

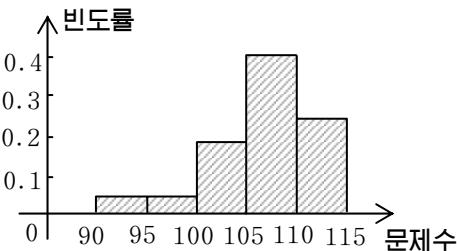
$\xi = 107$

2)

급	빈도수	빈도률
[90, 95)	2	0.05
[95, 100)	2	0.05
[100, 105)	9	0.225
[105, 110)	16	0.4
[110, 115)	11	0.275
총	40	1

3) (그림 12－1)

그림 12－1

2) 련습문제

－ 선택문제

1. 다음 사건에서 정확히 표현한것은 (　　)이다.

　A. $3^{\log_9 a^2}=a\ (a\neq 0)$은 확실한 사건이다.

　B. 한 통에 10개의 같은 구가 있는데 각각 번호 1, 2, …, 10을 새겼다. 임의로 한개 잡을 때 A＝{구의 번호가 짝수}, B＝{구의 번호가 3의 배수}라고 하면 A와 B는 배반사건이다.

　C. 《 $f(x)=x^2-2x+2,\ x\in[2,\ +\infty)$의 최소값은 1이다.》는 불가능한 사건이다.

　D. 《함수 $f(x)$가 짝함수이다.》는 《함수 $f(x)$가 홀함수이다.》의 나머지사건이다.

2. 한가정에서 총각애와 처녀애가 태여날 가능성은 같다고 한다.

　P: 《가정에 총각애 또는 처녀애가 있다.》

　Q: 《가정에 기껏 한명의 처녀애가 있다.》

　라고 하고 이 가정에 3명의 아이가 있다면 사건 P와 Q의 관계는 (　　)이다.

　A. P와 Q는 배반사건　　　B. P와 Q는 독립사건

　C. 사건 P가 일어나면 Q는 반드시 일어난다.

　D. P와 Q는 서로 독립사건이 아니다.

3. 사건 Q와 R가 서로 독립일 때 다음 식들에서 정확한것은 (　　)이다.

　A. P(Q)＝1－P(R)　　　B. P(Q・R)＝P(Q)・P(R)

　C. P(Q＋R)＝P(Q)＋P(R)　　　D. P(Q・R)＝0

4. 한개의 두자리수를 선택할 때 그것이 10의 배수일 확률은 (　　)이다.

　A. $\dfrac{2}{9}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $\dfrac{1}{10}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

5. 4개 과목 수학, 국어, 영어, 물리학습장들가운데서 한권을 뽑을 때 물리학습장이 뽑히지 않을 확률은 (　　)이다.

A. $\frac{1}{4}$　　B. 0　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

- 해답문제

6. 4개의 붉은 공과 3개의 흰 공이 들어있는 함에서 임의의 공 3개를 꺼낼 때
   1) 3개가 다 붉은 공일 확률을 구하여라.
   2) 2개가 붉은 공, 1개가 흰 공일 확률을 구하여라.
7. 수험생 A, B, C가 입학하는 확률은 각각 $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$이다. 이때 다음 확률을 각각 구하여라.
   1) 세명이 다 합격하는 확률
   2) 두명만 합격하는 확률
   3) 적어도 한명은 합격하는 확률
8. 3개의 서로 다른 독립인 시행으로 일어나는 사건 A, B, C가 있다. A가 일어날 확률은 $\frac{1}{2}$이고 A, B, C가 모두 일어나는 확률은 $\frac{1}{24}$이다. 또한 A, B, C가 다 일어나지 않을 확률은 $\frac{1}{4}$이다. 이때 사건 B, C가 일어날 확률을 각각 구하여라.
9. 앞뒤가 구분되여있는 원판을 3번 던질 때 앞면이 나타나는 회수 X의 확률분포를 구하여라.
10. 주사위를 60번 던질 때 웃면에 1이 나오는 회수 X의 기대값과 표준편차를 구하여라.
11. 어느 중학교 남학생들가운데서 임의로 선출된 81명의 몸무게의 평균값이 58.6kg, 표준편차가 4.5kg일 때 이 학교 학생들의 몸무게의 평균값을 믿음도 95.4%로 추정하여라.

13. 도함수와 적분

1) 문제풀이방법

례 1. 다음 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-5)(3n+8)}{n^2+7}$ 　　 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{2^{n+3}+5^{n-1}}$

(풀이) 1) 주어진 식 $=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}-\frac{40}{n^2}}{1+\frac{7}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}6+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{40}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{7}{n^2}}=6$

2) 주어진 식 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{1}{5}}=5$

례 2. 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\sqrt{n}$

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}$ 　 $(0\le\theta\le\frac{\pi}{2})$

3) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

(풀이) 1) 주어진 식 $=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}$$

2) $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$일 때 $\cos\theta>\sin\theta$ 즉 $\tan\theta<1$

∴ 주어진 식 $=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\tan^n\theta}{1+\tan^n\theta}=1$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때 주어진 식은 0이다.

$\frac{\pi}{4} < \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때 $\sin\theta > \cos\theta$ 즉 $\cot\theta < 1$

주어진 식 $= \lim_{n\to\infty}\frac{\cot^n\theta - 1}{\cot^n\theta + 1} = -1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta - \sin^n\theta}{\cos^n\theta + \sin^n\theta} = \begin{cases} 1 & (0 \le \theta < \frac{\pi}{4}) \\ 0 & (\theta = \frac{\pi}{4}) \\ -1 & (\frac{\pi}{4} < \theta \le \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

3) $a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$이므로 주어진 식은 다음과 같이 변형된다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$$

례 3. 극한을 구하여라.

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}$　　2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x^2}$　　3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^{x}$

(풀이) 1) 주어진 식 $= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 4} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^4$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^4 = e^4$$

2) 주어진 식 $= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)\right]=e$$

3) 주어진 식 $=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)^{x^2-1}\right)^{\frac{x}{x^2-1}}$

한편 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=0$

∴ 주어진 식 $=e^0=1$

례 4. $\lim_{x\to2}\frac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$이 되도록 a, b의 값을 결정하여라.

(풀이) 이 분수식의 극한이 8이고 분모의 극한이 $x\to2$일 때 0이므로 $x\to2$일 때 $x^3+ax^2+b\to0$이여야 한다.

$$x^3+ax^2+b=(x-2)\left[x^2+(a-2)x-\frac{b}{2}\right]$$

따라서 $x\to2$일 때

$$\begin{cases}2^3+a\cdot2^2+b=0\\2^2+(a+2)\cdot2-\frac{b}{2}=0\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases}4a+b=-8\\4a-b=0\end{cases}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=4$

례 5. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$ $(a>0)$을 구하여라.

(풀이) 주어진 식 $=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}-a\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+b\right)}{\left(\sqrt{x^2+b^2}-b\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+b\right)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2+a^2-a^2\right)\left(\sqrt{x^2+b^2}+b\right)}{\left(x^2+b^2-b^2\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}+a\right)}=\frac{|b|+b}{|a|+a}$$

$$=\frac{|b|+b}{2a}=\begin{cases}0 & (b\le 0)\\ \dfrac{b}{a} & (b>0)\end{cases}$$

례 6. $y=f(x)=3x^2-2x$ 가 주어졌다.

1) 도함수의 정의를 리용하여 $f'(2)$를 구하여라.

2) 곡선 $y=3x^2-2x$ 의 $x=2$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 1) $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[3(2+\Delta x)^2-2(2+\Delta x)\right]-\left(3\times 2^2-2\times 2\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(5\times 2)=10$$

2) $x=2$ 에서 $y=8$ 이고 기하학적의미로부터 $x=2$ 에서의 접선의 방향결수는 $f'(2)=10$

$\therefore\ y-8=10(x-2)$

$\therefore\ 10x-y-12=0$

례 7. 다음 함수의 도함수를 구하여라.

1) $y=5-4x^3$ 2) $y=(x^2-3x+5)^5$

3) $y=(2x+5)^5(2x^2+3x-1)$ 4) $y=\sin^3 x+\cos^4 x$

(풀이) 1) $y'=\left(5-4x^3\right)'=-\left(4x^3\right)'=-12x^2$

2) $y'=\left(\left(x^2-3x+5\right)^5\right)'$

$$=5\left(x^2-3x+5\right)^4\left(x^2-3x+5\right)'$$

$$=5(2x-3)\left(x^2-3x+5\right)^4$$

3) $y'=5(2x+5)^4(2x+5)'\left(2x^2+3x-1\right)+$

$$+\left(2x^2+3x-1\right)'(2x+5)^5$$

$$=10(2x+5)^4(2x^2+3x-1)+(4x+3)(2x+5)(2x+5)^4$$
$$=(2x+5)^4(20x^2+30x-10+8x^2+20x+6x+15)$$
$$=(2x+5)^4(28x^2+56x+5)$$

4) $y'=(\sin^3 x+\cos^4 x)'=(\sin^3 x)'+(\cos^4 x)'$
$$=3\sin^2 x\cos x+4\cos^3 x(-\sin x)$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2x(3\sin x-4\cos^2 x)$$

례 8. 점 (2, 0)을 지나며 곡선 $y=-x^3$과 접하는 직선의 방정식을 구하여라.

(풀이) 점 (2, 0)은 곡선에 놓이지 않으므로 접점을 $(x_0,\ -x_0^3)$이라고 하면 접선의 방정식은
$$y-(-x_0^3)=(-3x_0^2)(x-x_0)$$
접선이 (2, 0)을 지나므로
$$0+x_0^3=-3x_0^2(2-x_0)=-6x_0^2+3x_0^3$$
$$-6x_0^2+2x_0^3=0$$
$$x_0=0,\ x_0=3$$
곡선의 방정식으로부터 $x_0\neq 0$이므로
$$x_0=3,\quad y_0=-27$$
$$k=-3\times 3^2=-27$$
$\therefore\ 27x+y-54=0$

례 9. 함수 $y=x^3-3x^2-9x+1$의 증가구간, 감소구간을 구하여라.

(풀이) $y'=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

$(x+1)(x-3)<0$ 즉 $-1<x<3$ (감소구간)

$(x+1)(x-3)>0$ 즉 $x<-1$ 혹은 $x>3$ (증가구간)

례 10. 함수 $y=4x^3+ax^2+bx+5$가 $x=\frac{3}{2}$과 $x=-1$에서 극값을 가진다.

1) 함수의 식을 구하여라.

2) 이 함수의 단조구간을 구하여라.

3) $f(x)$의 [−1, 2]에서의 최대, 최소값을 구하여라.

4) 그라프를 그려라.

(풀이) 1) $y' = 12x^2 + 2ax + b$

$x = \dfrac{3}{2}$ 과 $x = -1$ 에서 극값을 가지므로

$$\begin{cases} 12 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 2a \cdot \dfrac{3}{2} + b = 0 \\ 12 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 0 \end{cases}$$

$\therefore\ a = -3,\ b = -18$

$\therefore\ y = 4x^3 - 3x^2 - 18x + 5$

2) $y' = 12x^2 - 6x - 18 = 6(x+1)(2x-3)$

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < \dfrac{3}{2}$	$x = \dfrac{3}{2}$	$x > \dfrac{3}{2}$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	$y_{극대} = 16$	↘	$y_{극소} = -\dfrac{61}{4}$	↗

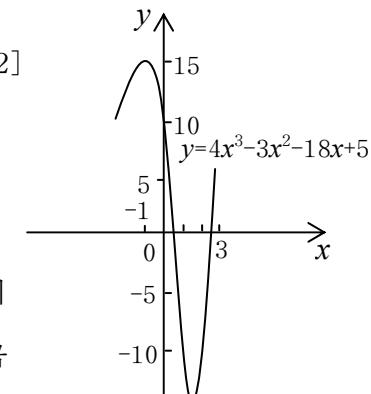
$(-\infty,\ -1) \cup (\dfrac{3}{2},\ +\infty)$는 증가구간이고 $(-1,\ \dfrac{3}{2})$은 감소구간이다.

그림 13-1

3) 머물점 $x = -1,\ \dfrac{3}{2}$ 은 [-1, 2] 에 속한다.

$f(-1) = 16$

$f(2) = -11 > -\dfrac{61}{4}$

따라서 $f(x)$ 는 [−1, 2]에서 최소값 $-\dfrac{61}{4}$, 최대값(극대값) 16을 가진다.

4) (그림 13−1)

례 11. 함수 $f(x) = (x^2 - 1)^2 - 1$ 의 극값을 구하여라. 그리고 구간 (−∞, +∞), [−2, 2], (−1, 1)에서의 함수의 최대, 최소값을 구하고 [−2, 2]에서의 그라프를 그려라.

(풀이) $y' = 2(x^2 - 1)\cdot 2x = 4x(x-1)(x+1)$

$\therefore\ f'(x) = 0$ 머물점 −1, 0, 1

$$f(-1) = f(1) = -1,\ f(0) = 0$$

$x = 0$일 때 극대값 0

$x = \pm 1$일 때 극소값 −1

(−∞, +∞)에서 $f(x)$의 최대값은 없고 최소값은 −1이다.

[−2, 2]에서 $f(x)$의 최대값은 $f(-2) = f(2) = 8$, 최소값은 −1이다.

그림 13−2

(−1, 1)에서 $f(x)$의 최대값은 $f(0) = 0$, 최소값은 없다.

그라프는 그림 13−2와 같다.

례 12. 정적분의 기하학적의미를 리용하여 다음의 정적분을 구하여라.

1) $\int_0^3 (x+2)dx$　　2) $\int_{-1}^2 (|x| - 1)dx$

(풀이) 1) $\int_0^3 (x+2)dx$ 는 직선 $y = x + 2$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$ 으로 둘러싸인 제형 OABC의 면적이다.(그림 13−3)

그림 13−3

$$\int_0^3 (x+2)dx = \frac{1}{2}\cdot(2+5)\cdot 3 = \frac{21}{2}$$

2) $y = |x| - 1 = \begin{cases} -x-1 & (-1 \le x < 0) \\ x-1 & (0 \le x < 2) \end{cases}$

$\int_{-1}^2 (|x| - 1)dx$ 는 직3각형 CDE와 2등변3각형 ABC의 면적의 차이다.

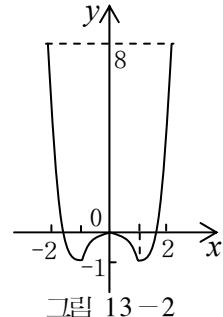
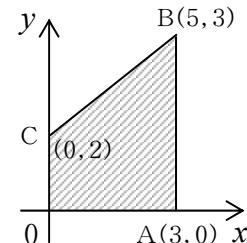
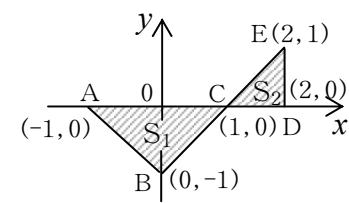



그림 13−4

즉 $\int_{-1}^2 (|x| - 1)dx = S_1 - S_2$

△ABC는 x축 아래쪽에 있으므로 $-S_2$ 은 [−1, 1]에서의 대응하는 정적분값이다.

$$\int_{-1}^{2}(|x|-1)dx = \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2 = \frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times2\times1=-\frac{1}{2}$$

(다른 방법) $\int_{-1}^{2}(|x|-1)dx = \int_{-1}^{0}(-x-1)dx + \int_{0}^{2}(x-1)dx$

$$=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{0}^{2}=\frac{1}{2}-1+\frac{4}{2}-2=-\frac{1}{2}$$

례 13. 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x$, $y=2x$로 둘러싸인 면적을 구하여라.(그림 13－5)

(풀이) 포물선 $y=x^2$과 직선 $y=x$의 사귐점은 P(1, 1), $y=x^2$과 $y=2x$의 사귐점은 Q(2, 4)이다.

점 P를 지나 y축에 평행인 선을 그어 $y=2x$와 사귀는 점을 P′라고 하면

면적 S＝△OPP′의 면적＋곡선도형 PP′Q의 면적

그림 13－5

[0, 1]에서 $2x > x \geq 0$이므로

△OPP′의 면적＝$\int_{0}^{1}(2x-x^2)dx$

[1, 2]에서 $2x > x^2 > 0$이므로

곡선도형 PP′Q의 면적＝$\int_{1}^{2}(2x-x^2)dx$

$$\therefore\ \mathrm{S}=\int_{0}^{1}(2x-x^2)dx+\int_{1}^{2}(2x-x^2)dx=\frac{7}{6}$$

례 14. 직각자리표계에서 선분 AB의 두 끝점 A, B의 자리표는 A(0, r), B(H, R)(R＞r)이다.
선분 AB를 x축주위로 한바퀴 회전하여 얻은 회전체의 체적 V를 구하여라.(그림 13－6)

(풀이) AB의 방정식

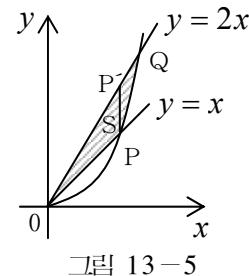
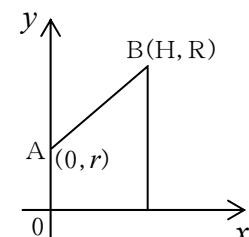



그림 13－6

$$y=\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{H}}x+r \quad (0\le x\le \mathrm{H})$$

$$\mathrm{V}=\pi\int_0^{\mathrm{H}}\left(\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{H}}x+r\right)^2 dx$$

$$=\frac{\mathrm{H}\pi}{\mathrm{R}-r}\int_0^{\mathrm{H}}\left(\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{H}}x+r\right)^2 d\left(\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{H}}x+r\right)$$

$$=\frac{\mathrm{H}\pi}{\mathrm{R}-r}\cdot\left.\frac{\left(\frac{\mathrm{R}-r}{\mathrm{H}}x+r\right)^3}{3}\right|_0^{\mathrm{H}}=\frac{\mathrm{H}\pi}{3}\left(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}r+r^2\right)$$

례 15． $y=2x^2$ 와 $y=x-4$ 로 둘러싸인 도형의 면적을 구하여라．(그림 13－7)

(풀이) $y=2x^2$ 과 $y=x-4$ 의 사귐점을 구하면 P(2，－2)，Q(8，4)이다．

적분변수를 y 라고 하면 [－2，4]에서 y 는 모두

$$y+4>\frac{y^2}{2}>0$$

$$\therefore\ \mathrm{S}=\int_{-2}^{4}\left[(y+4)-\frac{y^2}{2}\right]dy=18$$

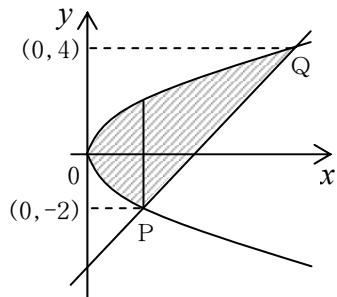



그림 13－7

2) 련습문제

－ 선택문제

1． $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{1+r}\right)^n=0$ 이다． r 가 취할수 있는 값범위는 (　　)이다．

A． $-1<r<\frac{1}{2}$ 　B． $r>-\frac{1}{2}$ 　C． $r>-1$ 　D． $r>\frac{1}{2}$

2． 무한같은비수렬의 매개 마디의 합은 9이고 매개 마디의 2제곱의 합

은 $\frac{81}{2}$과 같다. 이때 첫 마디는 ( )이다.

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. 6 D. 9

3. $\lim_{n\to\infty}\left(2n-\sqrt{4n^2-kn+3}\right)=1$일 때 k의 값은 ( )이다.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^n$ $(x\neq -1)$에서 x를 포함하는 마디의 결수는 S_n, x^2을 포함하는 마디의 결수는 P_n이다. 이때

$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{P}_n-\mathrm{S}_n}{n^3}$의 값은 ( )이다.

A. 1 B. 6 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{6}$

5. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$이 존재하면 $\lim_{n\to\infty}a_n$과 $\lim_{n\to\infty}b_n$은 ( )이다.

A. 모두 존재한다. B. 모두 존재하지 않는다.

C. 한개는 존재하고 다른 한개는 존재하지 않는다.

D. A, B, C 세 경우가 다 있을수 있다.

6. $y=f(x)$의 도함수가 $f'(x)=6x^2+5$일 때 $f(x)$는 ( )일수 있다.

A. $3x^2+5x$ B. $2x^3+5x+6$ C. $2x^3+5$ D. $6x^2+5x+6$

7. 함수 $y=x^3-3x^2$의 머물점은 ( )이다.

A. $x=0,\ x=2$ B. $x=0,\ x=3$

C. (0, 0), (2, −4) D. (0, 0), (3, 0)

8. $f(x)$는 $g(x)$의 원시함수이고 c는 상수이다.

다음 함수들가운데서 $g(x)$와 다른 원시함수는 ( )이다.

A. $f(x+c)$ B. $cf(x)$ C. $f(x)+c$ D. $f'(x)$

9. $f(x)$가 홀함수이면 $\int_a^b|f(x)|dx=$ ( )이다. $(a,\ b>0)$

A. $\left|\int_{-b}^{a}f(x)dx\right|$ B. $\left|\int_0^a f(x)dx-\int_0^b f(x)dx\right|$

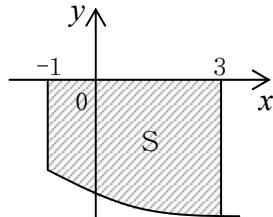
C. $\left|\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx\right|$ D. $\left|\int_0^a f(x)dx + \int_{-b}^a f(x)dx\right|$

10. 그림 13－8과 같이 $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 3$ 으로 둘러싸인 곡선제형의 면적 S는 (　)로 표시된다.

A. $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ B. $\int_{-3}^{1} f(x)dx$

C. $\int_{3}^{-1} f(x)dx$ D. $\int_{1}^{-3} f(x)dx$

그림 13－8

－ 빈칸채우기문제

11. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdots\cdots \sqrt[2n]{3} =$____

12. a, b 가 모두 정수일 때 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} =$____

13. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1-n} =$____

14. 수렬 －5.138, －5.138 8, －5.138 88, …의 극한은 ____

15. 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x) = 2x^2 + 3$이다.
$f(-1) = -2$일 때 $f(x) =$____

16. $n \in \mathrm{N}$일 때 $\int_{-a}^{a} (x^n - x^{n+1})dx =$____

－ 해답문제

17. $\lim_{x\to 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - n}{x-1}$의 값을 구하여라.

18. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n+1} - an - b\right) = 0$일 때 상수 a, b의 값을 구하여라.

19. 함수 $y = x^3$의 그라프의 한 점 P$(-1, -1)$을 잡고 점 Q(x, x^3) $(x \neq -1)$은 이 그라프의 임의의 점이라고 하자.

1) 직선 PQ의 방향곁수를 x로 표시하여라.

2) $k=\lim_{x\to -1} k_{\mathrm{PQ}}$ 이라고 하면 k의 값은 얼마인가?

3) 점 P를 지나며 방향결수가 k인 직선의 방정식을 구하여라.

20. $y=f(n)$ $(n\in \mathrm{N})$, $7f(n)=f(n-1)$, $f(1)=2$이다. $\lim_{n\to\infty}[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)]$의 값을 구하여라.

21. 2차함수 $y=n(n+1)x^2-(2n+1)x+1$ $(n\in \mathrm{N})$가 주어졌다. 2차함수의 그라프가 x축을 끊어내는 선분의 길이의 총합을 구하여라.

22. $f(x)=a(1-x)^3+b(1-x)+c$가 주어졌다. $f(1)=1$, $f'(2)=2$, $f''(3)=3$일 때 a, b, c의 값을 구하여라.

23. 두 직선 $y=x^3+ax$와 $y=x^2+bx+c$가 다 점 P(1, 2)를 지난다. 점 P에서 공통접선을 그었다면 a, b, c의 값은 얼마인가?

24. 함수 $y=|x|+2$ $(-3\le x<6)$의 그라프를 그리고 정적분의 기하학적의미를 리용하여 $\int_{-3}^{b}(|x|+2)dx$의 값을 구하여라.

25. 직선 $y=a$가 두 포물선 $y=-x^2+4$와 $y=\frac{1}{2}x^2-2$로 둘러싸인 도형의 면적을 2등분한다면 a의 값은 얼마인가?

26. 곡선 $y=2x^2$과 $y=x^3$으로 둘러싸인 도형을 x축주위로 한바퀴 회전할 때 생기는 회전체의 체적을 구하여라.

3) 자체시험문제

- 선택문제

1. 무한수렬

① 0.9, 0.99, 0.999, …, $\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$, …

② 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, …, $\frac{1}{3^{n-1}}$, …

③ 3, 3, 3, …

④ 1, −1, 1, −1, …, $(-1)^{n-1}$, …

가운데서 극한을 가지는것은 (　　)개이다.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 다음 명제들가운데서 정확한것은 (　　)이다.

A. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 2a$

B. $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$

C. $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$ 이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

D. $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

3. 함수 $y = f(x)$의 뜻구역은 M, 그의 도함수 $f'(x)$의 뜻구역은 N일 때 M, N의 관계는 (　)이다.

A. M＝N　　B. M⊂N　　C. M⊃N　　D. M∩N＝∅

4. 함수 $y = -\frac{2}{3}x^3 + \left(a + \frac{1}{a}\right)x^2 - 2x + 4\ (a < -1)$ 의 증가감소구간은 (　)이다.

A. $\left(a, \frac{1}{a}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{a},\ a\right)$

C. $(-\infty, a) \cup \left(\frac{1}{a},\ +\infty\right)$　　D. $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right) \cup (a,\ +\infty)$

5. $\pi\int_1^2 x^2 dx$ 는 (　)을 표시한다.

A. $y = x^2$ 과 직선 $y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ 로 둘러싸인 곡선도형의 면적

B. $y = x^2$ 과 직선 $y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ 로 둘러싸인 곡선도형을 x 축주위로 한바퀴 회전시킨 회전체의 체적

C. $y = x$, $y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ 로 둘러싸인 곡선도형의 면적

D. $y = x$, $y = 0,\ x = 1,\ x = 2$ 로 둘러싸인 곡선도형을 x 축주위로 한바퀴 회전시킨 회전체의 체적

― 빈칸채우기문제

6. 0.(10)＋0.0(10)＋0.00(10)＋ ⋯ ＝_____

7. $\mathrm{A} \neq 0$ 이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{A}n^2 + \mathrm{B}}$ ＝_____

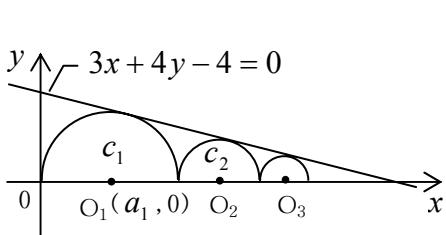
8. 곡선 L에 점 x 밖에서 접선을 그었을 때 방향결수가 $\frac{3}{4}x^2 + 4$ 이다. 곡선 L의 방정식은 _____

9. $\int_{-2}^{3} 4\left|x^3\right|dx =$ ＿＿＿

10. $\int_{-a}^{a} x^2 dx = 18(a>0)$ 이면

$a =$ ＿＿＿

그림 13－9

－ 해답문제

11. 그림 13－9에서 원중심이 각각 $O_1(a_1, 0)$, $O_2(a_2, 0)$, …, $O_n(a_n, 0)$이고 대응하는 반경이 각각 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 인 반원 C_1, C_2, …, C_n, …이 순서대로 서로 접한다. 그리고 모두 직선 $3x+4y-4=0$ 과 접하고 반원 C_1는 y 축과도 접한다.

   1) r_1, r_2, r_3 의 값을 구하여라.

   2) n 개 반원둘레의 합 S_n 을 구하여라.

   3) 반원둘레들의 합 S를 구하여라.

12. 곡선 $y=2x^3+x-3$ 의 접선과 직선 $y=7x-1$ 이 평행이다. 접점의 자리표와 접선의 방정식을 구하여라.

13. 함수 $y=f(x)=\left(x^2-2x\right)^4$ 가 있다. y'' 를 구하여라.

14. 함수 $y=f(x)=x^3+ax^2-a \ (a\in R)$ 가 주어졌다.

   1) a 가 변할 때 $x=x_0$ 이 $f(x)$ 의 극값점이라고 하면 점 $(x_0, f(x_0))$ 의 자리길의 방정식을 구하여라.

   2) a 가 변할 때 $f(x)$ 의 단조구간을 구하여라.

15. 포물선 C: $y=2x^2$, l_1: 점 A(1, －2)를 지나는 포물선 C의 접선, l_2: $x=a(a\neq -1)$ 일 때 C, l_1, l_2 로 둘러싸인 도형의 면적 S를 구하여라.

종합시험문제

△ 1차

ㅡ 빈칸채우기문제

1. 함수 $y=2^x(x\le 0)$의 거꿀함수는 _____

2. 안갈기식 $\frac{1}{x}<1$의 풀이모임은 _____

3. 수렬 $\{a_n\}$에서 $a_1=2,\ a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$일 때 $a_4=$_____

4. $\frac{1+2i}{i}=$_____

5. $\sin\alpha=\frac{4}{5}$이고 α가 2사분구의 각일 때 $\tan 2\alpha=$_____

6. 바른4각뿔의 옆면이 모두 바른3각형일 때 옆모서리와 밑면사이의 각의 크기는 _____

7. $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{1+4+7+\cdots+(3n-2)}=$_____

8. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=$_____

9. 2마디식 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$의 전개식에서 상수마디는 _____

10. F_1, F_2가 타원 $9x^2+4y^2=36$의 두 모임점이고 PQ는 F_1를 지나는 활줄이다. $\triangle PF_2Q$의 둘레의 길이는 _____

ㅡ 선택문제

11. 직선 $x+y=5$의 방향결수는 (　　)이다.

    A. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

    C. $\arctan(-1)$　　D. $-\arctan 1$

12. 5개 선분의 길이가 각각 3, 4, 5, 7, 9일 때 이 선분들가운데서 임의로 3개 취하여 3각형을 만들수 있는 확률은 (　　)이다.

    A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2}{5}$

13. 함수 $y=\sqrt{2}\sin\pi x\cdot\cos\pi x$는 ( )이다.

A. 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 홀함수　　B. 주기가 1인 홀함수

C. 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 짝함수　　D. 주기가 2인 짝함수

14. 타원의 모임점은 $F_1(-1,\ 0)$, $F_2(1,\ 0)$이다. P는 타원의 한 점이고 $|F_1F_2|$은 $|PF_1|$과 $|PF_2|$의 같은차를 가지는 가운데마디이다. 이 타원의 방정식은 ( )이다.

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

15. 점 $P(x,\ y)$의 자리표가 $\arcsin x=\arccos y$를 만족시킬 때 점 P의 자리길은 ( )이다.

A. $\frac{1}{4}$원　　B. 반원　　C. 타원　　D. $\frac{1}{4}$원

16. 다음의 3개 명제

1) 직선 a //평면 M, 직선 $b\subset$평면 M $\Leftrightarrow$ $a\,/\!/\,b$

2) 직선 a //평면 M, 직선 b //평면 M $\Leftrightarrow$ $a\,/\!/\,b$

3) 평면 M∩평면 N＝a, 직선 $b\,/\!/\,a$ $\Leftrightarrow$ b //평면 M이고 b //N

가운데서 정확한 명제의 개수는 ( )이다.

A. 0개　　B. 1개　　C. 2개　　D. 3개

17. 7개 수자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 중복이 없이 만들수 있는 서로 다른 3자리짝수의 개수는 ( )이다.

A. 45　　B. 90　　C. 120　　D. 2 160

18. 함수 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$의 그라프는 함수 $y=\sin 2x$의 그라프를 ( )하여 얻어진다.

A. 오른쪽으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동　　B. 오른쪽으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동

C. 왼쪽으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 평행이동　　D. 왼쪽으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동

19. 조건 ㄱ) $a^2>b^2$, 조건 ㄴ) $a<b<c$가 주어졌다. 조건 ㄱ)은 조건 ㄴ)의 ( )이다.

A. 충분하고 불필요한 조건
B. 필요하고 불충분한 조건
C. 필요충분조건
D. 필요하지도 충분하지도 않는 조건

20. $\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}+\frac{1}{4}\vec{k}$, $\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$ 이고 $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|$ 이며 $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 는 둘씩 서로 수직이다. 이때 $(3\vec{i})\cdot(4\vec{j})$은 ( )이다.

A. 1　　B. －1　　C. 0　　D. $\frac{1}{2}$

－ 해답문제

21. 함수 $y=\frac{x^3-2x^2}{|x|}$의 그라프를 그려라.

22. 함수 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$가 주어졌다. 점 P(3, 2)를 지나는 접선의 방정식을 구하여라.

23. 곡선 $y=-x^2+2x+3$과 직선 $y=-2x+6$으로 둘러싸인 구역이 있다.
1) 이 구역의 면적을 구하여라.
2) 이 구역을 x축주위로 회전하여 이루어지는 회전체의 체적을 구하여라.

24. 수렬 $\{a_n\}$에서 n째 마디까지의 합은 $S_n\neq 0$이고
$a_n=S_n\cdot S_{n-1}\ (n\geq 2)$, $a_1=2$이다.
1) 수렬 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$은 같은차수렬이라는것을 증명하여라.
2) $\lim_{n\to\infty} n\cdot S_n$의 값을 구하여라.

25. 3각뿔 A－BCD에서 AB＝CD＝3, AD＝BC＝4, ∠BAD＝∠BCD＝90°, AE⊥평면 BCD이다.
1) 어기는 직선 AB, CD는 서로 수직이라는것을 증명하여라.
2) 2면각 A－BD－C의 크기를 구하여라.
3) 3각뿔 A－BCD의 체적을 구하여라.

26. 1) k가 어떤 값일 때 직선 l: $x-y+1=0$이 곡선
$x^2+2x+k(x^2-y^2)=0$을 잘라내는 선분의 길이가 가장 짧겠

는가? 그의 최소길이를 구하여라.

2) k가 어떤 값일 때 방정식 $x^2+2x+k(x^2-y^2)=0$이 표시하는 곡선의 종류를 밝혀라.

△ 2차

－ 빈칸채우기문제

1. 함수 $y=x^2-1\ (x\le 0)$의 거꿀함수는 ____

2. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\sqrt{1-\sin\frac{2\pi}{5}}=____$$

3. $b<0$일 때 복소수 bi의 삼각형식은 ____

4. 함수 $y=\sqrt{2\arcsin x}$의 값구역은 ____

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{3x+2}=$____

6. 바른6면체 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$에서 M, N, P는 각각 AA_1, AB_1, B_1D_1의 가운데점이다. MN과 BP가 이루는 각은 $\alpha=$____

7. $a,\ b,\ c(a>b>c)$는 같은비수렬을 이룬다. 그 합은 13이고 적은 27이다. 이 같은비수렬의 공통비는 $q=$____

8. 수자 1, 2, 3, 4, 5로 30 000보다 크고 중복이 없는 다섯자리수를 ____개 만들수 있다.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)}=$____

－ 선택문제

10. M＝$\left\{(x,\ y)\middle|(x-y)\sqrt{x}=0\right\}$, N＝$\left\{(x,\ y)\middle|x^2-y^2=1\right\}$, P＝M∩N일 때 P의 원소의 개수는 (　)이다.

A. 1개　　B. 2개　　C. 3개　　D. 4개

11. $x>y>1,\ 0<a<b$일 때 다음의 안같기식

1) $a^x>a^y$　　2) $a^x>b^x$　　3) $a^{x+y}>a^{y-x}$

에서 반드시 성립하는 개수는 (　)이다.

A. 0개　　B. 1개　　C. 2개　　D. 3개

12. 두 벡토르 $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$가 주어졌다. $\vec{a}$와 $\vec{b}$사이의 관계는 (　)이다.

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\arccos\frac{1}{5}$　　C. $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

13. 한 주기에서 $y = \mathrm{A}\sin(\omega x+\varphi)$ 가 $x=\frac{\pi}{12}$ 일 때 $y_{\max}=2$, $x=\frac{7}{12}\pi$ 일 때 $y_{\min}=-2$ 이다. 함수의 식은 (　)이다.

A. $y=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$　　B= $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

C= $y=2\sin\left(-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$　　D. $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

14. 함수 $y=a(x^3-x)$ 의 감소구간은 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 이다. a 가 취할수 있는 값범위는 (　)이다.

A. $a>0$　　B. $-1<a<0$　　C. $a>1$　　D. $0<a<1$

15. 직선 $\begin{cases} x=-1+\frac{1}{2}t \\ y=-3-bt \end{cases}$ (t 는 보조변수)가 원 $x^2+y^2=4$ 를 끊어내는 활줄의 길이가 4이다. b 의 값은 (　)이다.

A. 3　　B. $\frac{3}{2}$　　C. -3　　D. $-\frac{3}{2}$

16. $(2x-y)^4$ 의 전개식에서 가장 작은 결수를 가지는 마디는 (　) 이다.

A. 2번째　　B. 3번째　　C. 4번째　　D. 5번째

17. 함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ 가 임의의 x 에 대하여 $f(4-x)=f(x)$ 이고 $f\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)>f\left(\arccos\frac{3}{4}\right)$ 이라고 하면 (　)이다.

A. $a>0,\ b>0$　　B. $a<0,\ b>0$

C. $a<0,\ b<0$　　D. $a>0,\ b<0$

ㅡ 해답문제

18. $|2+z|=1$ 일 때 $|z-1-3i|$ 의 최대값과 최소값을 구하여라.

19. a 가 1 아닌 정수일 때 x 에 관한 안갈기식

$$\begin{cases} \log_a 2 < \log_a x \\ x^2 - (a+3)x + 2a + 2 > 0 \end{cases}$$

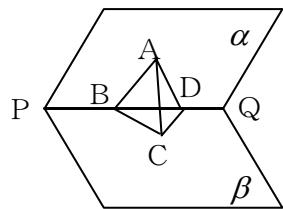
의 풀이모임을 구하여라.

20. 포물선 $y = x^3 + 3$에 정점 A(1, 0)을 지나는 두 접선 AP, AQ를 그었을 때
   1) 포물선과 두 접선으로 둘러싸인 도형의 면적 S를 구하여라.
   2) 포물선과 두 접점을 련결한 선으로 둘러싸인 도형을 x축주위로 한바퀴 돌릴 때 얻어지는 회전체의 체적 V를 구하여라.

21. 2면각 α －PQ－ β의 크기는 $60°$이다. 점 B, D는 PQ에 있고 △ABD와 △CBD는 각각 평면 α, β에 놓이는 한 변이 2인 바른 3각형이다.(그림 14－1)
   1) 점 A로부터 평면 β까지의 거리를 구하여라.
   2) 2면각 A－DC－B의 크기를 구하여라.

그림 14－1

22. 수렬 $\{Z_n\}$, $Z_n \in \mathrm{C}$에서 첫 마디 Z_1는 $\left|Z_1 - \sqrt{2}(1+i)\right| = 1$을 만족하고

$$Z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} Z_n \ (n \in \mathrm{N})$$이다.

복소수평면에서 복소수 Z_n에 대응하는 점을 A_n $(n \in \mathrm{N})$이라고 하고 $\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_2$, $\triangle \mathrm{A}_2\mathrm{OA}_3$, $\triangle \mathrm{A}_3\mathrm{OA}_4$, …, $\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}$, …(O는 원점)의 면적을 차례로 각각 S_1, S_2, S_3, …, S_n이라고 하자.
   1) $\mathrm{S} = \lim_{n\to\infty}(\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3 + \cdots + \mathrm{S}_n + \cdots)$일 때 S의 최대값을 구하여라.
   2) $\arg Z_n = \theta_n$, $\omega = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6$일 때 ω의 값범위를 구하여라.

답과 지시

1.

2) 련습문제

1. B　2. A　3. B　4. B　5. D　6. C　7. D　8. D　9. A

10. 《$a, b, c \in \mathrm{N}$, a, b가 c의 배수가 아니면 $a \cdot b$는 모두 c의 배수가 아니다.》, 거짓, 참　11. 2, 3　12. $\log_a b < \log_b \frac{1}{b} < \log_a b$

13. C, D, D, A, B, C　14. $y = x^2 + 1(x \le 0)$　15. e^2　16. 홀

17. $0 < a < 1$일 때 $(-\infty, 2]$, $a > 1$일 때 $[2, +\infty)$

18. $\log_2(x^2 - 5x + 8) = 1$로부터 $x_1 = 2, x_2 = 3$ 즉 B$=\{2, 3\}$, C$=\{2, -4\}$, A∩B⊃∅이므로 A∩B는 비지 않는 모임이고 A∩C=∅이다.
2∌A, −4∌A
∴ 3∈A
∴ $3^2 - 3a + a^2 - 19 = 0$
∴ $a = 5, a = -2$
$a = 5$일 때 A∩C=∅이 모순되므로 버린다. $a = -2$는 문제의 뜻에 맞는다. ∴ $a = -2$

19. $a \in \overline{\mathrm{B}}$이면 $a \notin \mathrm{B}$, $a \notin \mathrm{A}$ 즉 $x \in \overline{\mathrm{A}}$
∴ $\overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$ 즉 $\overline{\mathrm{B}}$는 $\overline{\mathrm{A}}$의 부분모임이다. A⊂B이므로 $b \in \mathrm{A}$이고 $b \notin \mathrm{A}$이면 $b \in \overline{\mathrm{A}}, b \notin \overline{\mathrm{B}}$
∴ $\overline{\mathrm{B}} \subset \overline{\mathrm{A}}$
$\overline{\mathrm{B}}$의 원소는 모두 $\overline{\mathrm{A}}$에 속하고 $\overline{\mathrm{A}}$에는 $\overline{\mathrm{B}}$에 속하지 않는 적어도 한개 원소가 있다.

20. 거꿀안명제 《실수 x, y에 대하여 $x = y$이면 $x^2 = y^2$이다.》를 증명하자.

$$x = y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow (x+y)(x-y) = (x+y) \cdot 0 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$$

두 명제는 서로 거꿀안명제이므로 주어진 명제가 성립한다.

21. (그림 14-2)

22. $x = 2$ 또는 $x = -1$일 때 분모가 0이고 분자는 0이 아니다. 방정식 $y(x^2 - x - 2) = x + 4$를 만족하는 풀이를 구하는 문제로 된다. 즉

$$yx^2-(y+1)x-2(y+2)=0$$

$x\in R$ 에 대하여 $D=(y+1)^2+8y(y+2)\geq 0$ 이고 2차마디곁수 $y\neq 0$ 이므로 함수의 값구역은

$$(-\infty,\ \frac{-3-2\sqrt{2}}{3}]\cup[\frac{-3+2\sqrt{2}}{3},\ +\infty)$$

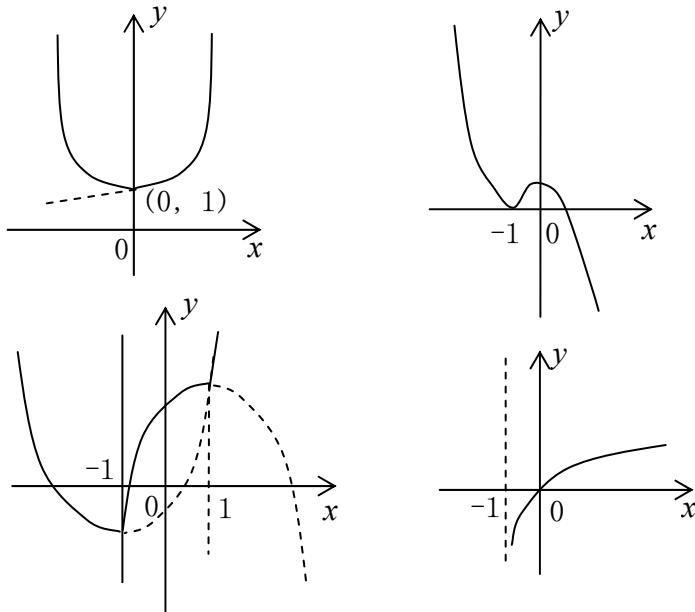



그림 14－2

23. 1) $f(a)=f\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)=f\left(\frac{a}{b}+f(b)\right)$

$\therefore\ f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$

2) $f(a^n)=f(a^{n-1}\cdot a)=f(a^{n-1})+f(a)$

$=f(a^{n-2}\cdot a)+f(a)=\cdots=nf(a)$

24. $\sqrt{1+x^2}>|x|$ 이므로 $x+\sqrt{1+x^2}>x+|x|\geq 0$

즉 $y>0$

$\therefore \ y-x=\sqrt{1+x^2}$

량변을 2제곱하면 $x=\dfrac{y^2-1}{2y}\ (y>0)$

따라서 구하려는 거꿀함수는 $y=\dfrac{x^2-1}{2x}\ (x>0)$

25. $x\le 0,\ x\ne -4,\ x^2-x-6>0$
따라서 뜻구역은 $(-\infty,\ -4)\cup(-4,\ -2)$

26. $a\ge b>0$이라고 하면 $a-b\ge 0,\ \dfrac{a}{b}>1$

지수함수의 성질로부터 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}\ge 1$

$0<a<b$라고 하면 $a-b<0,\ 0<\dfrac{a}{b}<1$

마찬가지 방법으로

$a,\ b\in \mathrm{R}^+$일 때 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a-b}>1$ 즉 $a^{a-b}>b^{a-b}$

$\therefore \ a^a b^b>a^b b^a$

3) 자체시험문제

1. B 2. D 3. D 4. A 5. A 6. D 7. $2\le x<3$이면 $x^2-x-6\le 0$이므로 참 8. $(-\infty,\ \dfrac{9}{7})\cup(\dfrac{9}{7},\ +\infty)$

9. $y=\log_3\dfrac{x}{1-x}\ (0,\ 1)$ 10. $(-\infty,\ 2],\ [2,\ +\infty)$

11. $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ①

$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{-x-1}$ ②

①+②하면

$$f(x)=\frac{1}{x^2-1},\ g(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

12. PQ$=x\ (0\le x\le 1)$이라고 하면 PN$=4-x$

△APQ∽△ABF이므로 $\frac{x}{1}=\frac{\mathrm{AQ}}{2}$

즉 AQ$=2x$, PS$=2-2x$, PM$=2+2x$

따라서 직4각형 PNDM의 면적

$$\mathrm{S}(x)=(4-x)(2+2x)=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

$x\in[0,1]$이므로 $\mathrm{S}_{\max}=12$

13. $y=9^x$ 이므로 $x=\log_9 y\ (x\in\mathrm{R})$

$\therefore\ f^{-1}(x)=\log_9 x$

$\therefore\ f^{-1}(3^x+6)=\log_9(3^x+6)$

14. (그림 14-3)

$$\frac{1}{\log_{(y+1)}x}-\frac{1}{\log_2 x}=2\Rightarrow\frac{\lg(y+1)-\lg 2}{\lg x}=2$$

$$\Rightarrow\lg\frac{y+1}{2}=\lg x^2\Rightarrow\frac{1}{2}(y+1)$$

$=x^2\ (x>0,\ x\neq 1,\ y>-1,\ y\neq 0)$

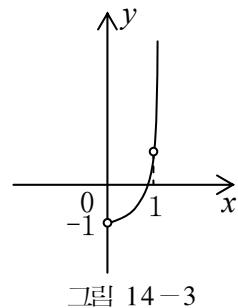
$y=2x^2-1\ (x>0,\ x\neq 1,\ y\neq 0)$

그림 14－3

2.

2) 련습문제

1. 2, $\pm\sqrt{3}$ 2. $f(x)=(a+b+c)x^2-(bc+ca+ab)x+abc$

3. 1) $a+b\neq 0$ 일 때 $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$, $a+b=0$ 일 때 없다. 또는 $x=0,\ x=a+b$ 2) {(2, $\sqrt{2}$), ($\sqrt{2}$, 2)} 3) {$\frac{-15+\sqrt{129}}{2}$, －4, －6} 4) {3} 5) $a\in(-\infty,\ 0)\cup\{1,\ 2\}$일 때 $\varnothing$, $a\in(0,\ 1)\cup\{1,\ 2\}\cup\{3\}$일 때 $x=a+2$, $a\in\{2,\ 3\}\cup\{3,\ +\infty\}$일 때 $x=a\pm 2$ 6) $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ 7) $x\geq 3$ 일 때 모든 수, $x<3$ 일 때 없다. 4. $-\frac{7}{2}\leq k\leq -3$ 5. $a<-\sqrt{6}$ 6. 19살, 15살, 12살 7. 0 또는 $\frac{1}{100}$

8. 10L 9. 3 : 4 : 6 10. 16번째 11. $120\,\mathrm{km}/\mathrm{h}$, $150\,\mathrm{km}/\mathrm{h}$

3) 자체시험문제

1. A 2. B 3. 2 4. $\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$, $\left(0,\ \frac{1}{5}\right)$ 5. 1) $\{-2\}\cup[2,\ +\infty)$

2) $a+b\neq 0$일 때 $x=\frac{2(1-a^2-ab-b^2)}{3(a+b)}$,

$a+b=0$일 때 $1-a^2-ab-b^2=1-a^2$,

$a=\pm 1$일 때 임의의 수, $a\neq\pm 1$일 때 풀이는 없다.

3) {(3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2), (2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5)} 4) $\{(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})\}$ 5) {(4, 9), (−4, −9), (9, 4), (9, −4)}

6) {(5, 5)} 7) $\{10^{-1},\ 2,\ 10^3\}$ 6. (략함) 7. 8, $6\sqrt{10}$ 8. (략함)

3.

2) 련습문제

1. D 2. C 3. A 4. C 5. B 6. D 7. A 8. D

9. $\{x|2k\pi < x \leq 2k\pi+\frac{\pi}{2},\ 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\leq x < 2(k+1)\pi\ (k\in\mathrm{Z})\}$

10. (−4, 0] 11. π 12. $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ 13. 1

14. 왼변$=\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin^2 x=\tan^2 x,$

오른변$=\frac{\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}{\left(1-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}=\frac{\sin^2 x(\cos x-\sin x)^2}{\cos^2 x(\sin x-\cos x)^2}=\tan^2 x$

15. 주어진 식$=\frac{|\sin 10^\circ-\cos 10^\circ|}{\cos 10^\circ-\sin 170^\circ}=\frac{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ-\sin 10^\circ}=1$

16. 1) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

$$=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

따라서 이 함수의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

2) $y=\dfrac{1-\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}=-\cot\frac{x}{2}$

따라서 이 함수의 주기는 2π 이다.

17. $\frac{56}{65}$

18. 1) $(\sin A+\sin 5A)+\sin 3A=a$ 을 풀면

$2\sin 3A\cos 2A+\sin 3A=a$

$\sin 3A(2\cos 2A+1)=a$ ①

$(\cos A+\cos 5A)+\cos 3A=b$

$\therefore\ \cos 3A(2\cos 2A+1)=b$ ②

$b\neq 0$ 일 때 ①을 ②로 나누면 $\tan 3A=\frac{a}{b}$

2) ①^2+②^{2}로부터 얻어진다.

19. 1) $f(x)=1-\sin^2 x+2m\sin x-2m-2$

$=-\sin^2 x+2m\sin x-2m-1$

$=-(\sin x-m)^2+m^2-2m-1$

문제의 의미로부터 $m\leq 0,\ \ x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$

따라서 $\sin x=0$ 일 때 $f(x)$ 는 최대값 $-2m-1$ 을 가진다. 즉 $x=0$ 일 때 $f(x)$ 는 최대값을 가진다.

2) $f(x)$ 가 항상 0보다 작으므로 $f(x)$ 의 최대값은 0보다 작다.

즉 $-2m-1<0$, $m>-\frac{1}{2}$ 또한 $m\leq 0$

따라서 m 의 값범위는 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right]$ 이다.

20. $f(x)=2a\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-\sqrt{3}a\sin 2x+a+b$

$$=-2a\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+2a+b$$

$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ 이므로 $\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right]$ 코시누스함수의 단조성에 의하여 $-\frac{1}{2}\le\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\le 1,\ a=0$ 이면 $f(x)=b$ 이므로 문제의 조건은 성립되지 않는다.

$a\ne 0,\ a>0$ 일 때 $b\le f(x)\le 3a+b,\ -5\le f(x)\le 1$ 이므로

$$\begin{cases}b=-5\\3a+b=1\end{cases} \text{ 즉 } \begin{cases}a=2\\b=-5\end{cases}$$

$a<0$ 일 때 $3a+b\le f(x)\le b$ $\begin{cases}b=1\\3a+b=-5\end{cases}$ 즉 $\begin{cases}a=-2\\b=1\end{cases}$

따라서 상수 $a,\ b$ 는 2와 －5 혹은 －2, 1이다.

21. 1) 주어진 식$=\frac{1}{2}(1+\cos 146°)+\frac{1}{2}(1-\cos 86°)+\cos 73°\sin 43°$

$$=1-\frac{1}{2}(\cos 34°+\cos 86°)+\frac{1}{2}(\sin 116°-\sin 30°)$$

$$=1-\cos 60°\cos 26°+\frac{1}{2}\cos 26°-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

2) 주어진 식＝

$$=\frac{2\sin 50°}{\sin 50°\cos 50°}+\frac{\sin 10°}{\cos 10°}=\frac{2\sin 50°}{\sin 100°}+\frac{\sin 10°}{\cos 10°}+\frac{\sin 10°}{\cos 10°}$$

$$=\frac{2\cos 40°+\sin 10°}{\cos 10°}=\sqrt{3}$$

3) 자체시험문제

1.C 2. D 3. C 4. B 5. 4 6. $\frac{\pi}{2}$

7. $\frac{\pi}{4}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{3}+k\pi\,(k \in \mathrm{Z})$ 8. $3-\sqrt{13} \le y \le 3+\sqrt{13}$

9. 조건으로부터

$$\sin^2 \mathrm{A} = b^2 \sin^2 \mathrm{B} \qquad ①$$

$$a^2 \tan^2 \mathrm{A} = \tan^2 \mathrm{B} \ \text{ 즉 } \ a^2 \frac{\sin^2 \mathrm{A}}{\cos^2 \mathrm{A}} = \frac{\sin^2 \mathrm{B}}{\cos^2 \mathrm{B}}$$

식 ①을 갈아넣으면 $a^2 \frac{\sin^2 \mathrm{A}}{\cos^2 \mathrm{A}} = \frac{\frac{\sin^2 \mathrm{A}}{b^2}}{1-\frac{\sin^2 \mathrm{A}}{b^2}}$

즉 $\sin^2 \mathrm{A}(a^2b^2 - a^2 \sin^2 \mathrm{A}) = \sin^2 \mathrm{A}(1-\sin^2 \mathrm{A})$

$\therefore$ $\sin \mathrm{A} = 0$ 또는 $a^2b^2 - a^2 \sin^2 \mathrm{A} = 1 - \sin^2 \mathrm{A}$ 즉

$$\sin \mathrm{A} = \pm\sqrt{\frac{1-a^2b^2}{1-a^2}}$$

10. $y = \cos^2 \pi x - 2\sin \pi x \cos \pi x + \cos^2 \pi x$

$= 1 - \sin 2\pi x$

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
y	1	0	2	0	2	1

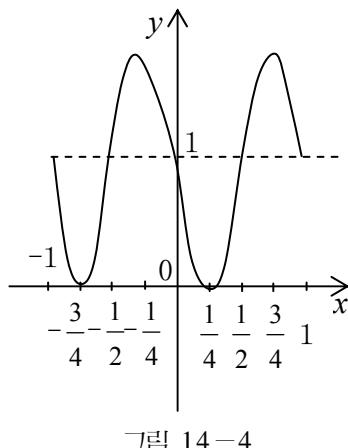
(그림 14-4를 참고)

그림 14－4

11. $y = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})}{2\cos^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$= \frac{\sin\frac{x}{2}(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2})}{2\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}} = \sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}(1-\cos x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$$

따라서 y의 최대값은 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$, x의 값은 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\therefore\ x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathrm{Z})$

4.

2) 련습문제

1. 1) $\frac{5\pi}{4}$ 2) $-\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{3\pi}{5}$ 5) $\frac{4\pi}{5}$ 6) $\frac{\pi}{6}$

2. 1) $x=\pi-\arcsin\frac{1}{3}$ 2) $x=\pi+\arcsin\frac{1}{4}$ 3) $x=-\arccos\frac{2}{3}$ 4) $x=\pi+\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$ 5) $x=\pi+\arctan\frac{5}{3}$ 6) $x=-\arctan\frac{1}{2}$ 3. 1) 뜻구역 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, 값구역 $[-\pi, \pi]$ 2) 뜻구역 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, 값구역 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 3) 뜻구역 $(-\infty, +\infty)$, 값구역 $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 4) 뜻구역 $[1, 2]$, 값구역 $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 5) 뜻구역 $[-2, -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}, 2]$, 값구역 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 6) 뜻구역 $(-\infty, 2)\cup(2, +\infty)$, 값구역 $(0, \pi)$ 7) 뜻구역 $[0, 1]$, 값구역 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 8) 뜻구역 $(0, +\infty)$, 값구역 $(\sqrt{\frac{2}{\pi}}, +\infty)$ 4. 1) $\frac{23}{24}$ 2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 3) $-\frac{1}{9}$ 4) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ 5) 1 6) $-\frac{13}{77}$ 7) $\frac{58}{33}$ 5. 1) $y=\frac{1}{4}\sin 2x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$

2) $y=2\tan x\left(x\in\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ 6. (략함)

7. 1) $x_1=k\pi+\arctan\frac{1}{2},\ x_2=k\pi-\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathrm{Z})$

2） $x_1 = k\pi + \arctan\frac{3}{2}$, $x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$

3） $x_1 = 2k\pi + 2\arctan\frac{1}{2}$, $x_2 = 2k\pi - 2\arctan 2$ $(k \in Z)$

4） $x_1 = (2k+1)\pi$, $x_2 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

5） $x = k\pi + \arctan\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)$ $(k \in Z)$

6） $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ $(k \in Z)$

3) 자체시험문제

1. D 2. B 3. B 4. C 5. C 6. C 7. B 8. A 9. D 10. D

11. 1） $\frac{\pi}{2}$ 2） $x>0$일 때 $y=0$, $x<0$일 때 $y=-\pi$ 3） $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$ 12. 뜻구역 $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, 값구역 $\left[-\arcsin\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

13. $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$, $x = k\pi \pm \arcsin(\sqrt{3-a^2}-1)$ $(k \in Z)$

5.

2) 련습문제

1. C 2. C 3. D 4. B 5. A 6. C 7. D 8. B

9. $\log_{\frac{3}{4}}\frac{5}{4} < \left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{4}}$ 10. $-\frac{5}{6}$, -5

11. $x \in \left(-\infty, \frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$ 12. $\ge$

13. $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 14. $x \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ 15. $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$

16. $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi\right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right)$

17. $a>1$일 때 $x<a+1$, $a=1$일 때 $\varnothing$, $a<1$일 때 $x>a+1$

18. $0 < x \le \frac{1}{4}$ 또는 $x < x < 4$ 19. $a = 0$ 또는 $a = 1$

20. (증명) 비교법을 리용한다.

$$\frac{a^a \cdot b^b \cdot c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} = a^{\frac{a-b}{3}+\frac{a-c}{3}} \cdot b^{\frac{b-a}{3}+\frac{b-c}{3}} \cdot c^{\frac{c-a}{3}+\frac{c-b}{3}}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}},$$

$\frac{a}{b} > 1,\ \frac{a-b}{3} > 0$ 이므로 $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} > 1$

같은 방법으로 $\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{b-c}{3}} > 1$, $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} > 1$

$\therefore\ \frac{a^a \cdot b^b \cdot c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} > 1$ 즉 $a^a \cdot b^b \cdot c^c > (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$

21. (증명) 왼변＝

$$= \log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1) \le \left[\frac{\log_n(n+1)+\log_n(n-1)}{2}\right]^2$$

$$= \frac{\log_n^2(n^2-1)}{4} < \frac{\log_n^2 n^2}{4} = 1 = \text{오른변}$$

22. (증명) $a+b>c,\ a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로

$$\text{왼변} = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{1}{1+\frac{1}{a+b}}$$

$$> \frac{1}{1+\frac{1}{c}} = \frac{c}{1+c} = \text{오른변}$$

23. (증명) $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ 이고

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} = \sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2} \ge x + \frac{y}{2}$$

마찬가지로 $\sqrt{y^2+yz+z^2}=\sqrt{\left(z+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2}\geq z+\frac{y}{2}$

이므로 $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}\geq x+y+z$

24. $x+y+z=1$이므로

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\left(1+\frac{x+y+z}{x}\right)\left(1+\frac{x+y+z}{y}\right)\left(1+\frac{x+y+z}{z}\right)$$

$$=\left(1+1+\frac{y+z}{x}\right)\left(1+1+\frac{x+z}{y}\right)\left(1+1+\frac{x+y}{z}\right)\geq 4\cdot 4\cdot 4=64$$

3) 자체시험문제

1. A 2. B 3. A 4. D 5. C 6. $x>\frac{1}{2}$ 7. $1<x\leq 2$

8. $a=-12,\ b=-2$ 9. $\{x|x<-2$ 또는 $-1\leq x<0$ 또는 $x>0\}$

10. $x>\frac{1}{2}$ 11. $\frac{3-\sqrt{37}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{37}}{2}$

12. 1) $a>1$일 때 $-1<x<0$ 또는 $x>1$, $a=1$ 일 때 $\varnothing$,
$0<a<1$일 때 $x<-1$ 또는 $0<x<1$

2) $1<x<a$ 또는 $0<x<\frac{1}{a}$

13. (증명) $x_1>0,\ x_2>0,\ f(x_1)=\log_{\frac{1}{2}}x_1,\ f(x_2)=\log_{\frac{1}{2}}x_2$이므로

$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]=\frac{1}{2}\left[\log_{\frac{1}{2}}x_1+\log_{\frac{1}{2}}x_2\right]=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x_1\cdot x_2)$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x_1+x_2}{2}\leq\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x_1\cdot x_2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(x_1\cdot x_2)$$

따라서 안같기식 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f\left(\frac{x_1\cdot x_2}{2}\right)$가 성립한다.

14. (증명) $\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha(\sin 2\beta)^2}\geq\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}=$

$$=1+\tan^2\alpha+4(1+\cot^2\alpha)=5+\tan^2\alpha+4\cot^2\alpha$$

$\geq 5+2\tan\alpha\cdot 2\cot\alpha = 5+4 = 9$

15. $x^2+y^2\big|_{\max} = 4,\ x^2+y^2\big|_{\min} = 0$

16. 1) $a^{x+2}+a^{x-2} = (a^2+a^{-2})\cdot a^x,\ \ a^{2x}-(a^2+a^{-2})a^x+1<0$

즉 $(a^x-a^2)(a^x-a^{-2})<0,\ 0<a<1$일 때 $a^2<a^{-2}$

즉 $a^2<a^x<a^{-2}$

따라서 $-2<x<2,\ a>1$일 때 $a^2>a^{-2}$ 즉 $a^{-2}<a^x<a^2$

따라서 $-2<x<2,\ a=1$일 때 $\varnothing$

이로부터 $a\neq 1$일 때 안갈기식의 풀이 $-2<x<2,\ a=1$일 때 $\varnothing$

2) $x>1$일 때

$\log_x(x+1)>\log_x x=1,\ \log_{x+1}x<\log_{x+1}(x+1)=1$

따라서 $x>1$은 안갈기식의 풀이이다.

$0<x<1$일 때

$\log_x(x+1)<0,\ \log_{x+1}x<0,$

$$\frac{|\log_x(x+1)|}{|\log_{x+1}x|} = \left|\log_x^2(x+1)\right| = \log_x^2(x+1),$$

$0<\log_x^2(x+1)<1$ 즉 $|\log_x(x+1)<1|$

$\therefore\ \log_x(x+1)>-1=\log_x\frac{1}{x}$

따라서 련립안갈기식 $\begin{cases}0<x<1\\ \frac{1}{x}>x+1\end{cases}$의 풀이 $0<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$은 안갈기식의 풀이이다.

따라서 안갈기식의 풀이는 $\{x|x>1\}\cup\left\{x\middle|0<x<\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$

6.

2) 련습문제

1. 27, 26 2. $a_n=\frac{n^2}{n^2+1}$ 3. $\pm2\sqrt{3}$ 또는 $\pm2\sqrt{3}i$ 4. 같은차, 갈

은비, 같은비 5. $a_5=27$ 6. $S_n=2n+\frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot 4^n}$

7. $\frac{1}{2}(n+2-m)$ 8. $\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^{k-1}}$ 9. B

10. D 11. D 12. D 13. C 14. A

15. 복소수의 성질 $z^7=-1$로부터

$$S_{182}=\frac{1-z^{182}}{1-z}=\frac{1-z^{26\times 7}}{1-z}=\frac{1-(z^7)^{26}}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0$$

적은 $z^{\frac{(1+181)\times 181}{2}}=z^{91\times 181}=(z^7)^{13\times 181}=(-1)^{13\times 181}=-1$

16. $a_{11}=3+(n-1)\lg\frac{1}{2}=0$ 으로부터

$$n=10,\ \ S_{10}=\frac{\left(3+3+9\lg\frac{1}{2}\right)\times 10}{2}=(6-9\lg 2)\times 5=16.455$$

따라서 첫 10번째 마디까지의 합이 최대로 되며 최대값은 약 16.5

17. (증명) 수학적귀납법을 리용한다. $n=k+1$일 때 원과 다른 k개의 원들은 $2k$개의 사귐점을 가진다. 이로부터 평면은 $2k$개 부분으로 더 갈라진다. 즉

$$(k^2-k+2)+2k=k^2+k+2$$

따라서 $(k+1)^2-(k+1)+2$개의 부분으로 갈라진다.

18. 수렬 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \cdots$에 대하여 일반마디는

$$a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}$$

이고 합은

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

19. 1) (증명) $y_n=n(n+2)x^2-2(n+1)x+1$

포물선의 정점을 (x_0, y_0)이라고 하면

$$x_0=\frac{n+1}{n(n+2)},\quad y_0=\frac{-1}{n(n+2)},\quad \frac{x_0}{y_0}=-(n+1)$$

이므로 $n=-\left(\frac{x_0+y_0}{y_0}\right), y_0=\frac{-y_0}{x_0^2-y_0^2}$ 을 갈아넣으면

$$x_0^2-y_0^2+y_0=0$$

따라서 (x_0, y_0)은 쌍곡선 $x^2-y^2+y=0$에 있다.

2) $x_1+x_2=\frac{2(n+1)}{n(n+2)},\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{n(n+2)}$ 이므로

$$|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{4}{n^2(n+2)}$$

$$\therefore\ |x_1-x_2|=\frac{2}{n(n+2)}$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n-2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

20. 1) $a_2a_1-2a_1+1=0$,

$a_1=2$ 이므로 $a_2=\frac{3}{2}$ 그러면 $a_1\cdot a_2=3$

또한 $a_3a_2-2a_2+1=0$

$\therefore\ a_3=\frac{4}{3}, a_1a_2\,a_3=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=4$, $a_4a_3-2a_3+1=0$

$\therefore\ a_4=\frac{5}{4}$, $a_1a_2a_3a_4=5$

2) $a_1a_2a_3\ \cdots\ a_n=n+1$

(증명) (1) $n=2$ 일 때 $a_1a_2=3$은 성립한다.

(2) $n=k$ 일 때 성립한다고 하자. 즉

$$a_1a_2a_3\ \cdots\ a_k=k+1,\quad a_k=\frac{k+1}{k}$$

$n=k+1$일 때 $a_{k+1}a_k-2a_k+1=0$이므로

$$a_{k+1}=\frac{2a_k-1}{a_k}=\frac{k+2}{k+1}$$

그러므로

$$a_1a_2a_3\cdots a_ka_{k+1}=(k+1)a_{k+1}$$

$$=(k+1)\frac{k+2}{k+1}=(k+1)+1$$

(1)과 (2)로부터 $\forall n\in\mathrm{N}$에 대하여 성립한다.

3) 자체시험문제

1. $a_n=\dfrac{4n-1}{6n-1}$ 2. $x=\log_2 5$ 3. $\mathrm{S}=\dfrac{3}{4}$ 4. $a_4a_7=\dfrac{1}{2}$

5. $\sqrt{n}-1$ 6. $a_n=\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$ 7. B 8. D 9. C 10. D 11. B

12. A

13. $n=1$일 때

왼변 $=\cot\dfrac{x}{2}-\cot x=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x}>1$ 이므로 안갈기식은 성립한다.

$n=k$ 일 때 $\cot\dfrac{x}{2^k}-\cot x\geq k$ 가 성립한다고 하면 $n=k+1$일 때

$$\cot\frac{x}{2^{k+1}}-\cot x=\frac{1+\cos\frac{x}{2^k}}{\sin\frac{x}{2^k}}-\cot x$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^k}}+\cot\frac{x}{2^k}-\cot x\geq 1+k$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 안갈기식이 성립한다.

따라서 $\forall n\in\mathrm{N}$에 대하여 안갈기식이 늘 성립한다.

14. $f(x)=ax+b$라고 하면 $8a+b=15$이고

$$(2a+b)(4a+b)=(5a+b)^2$$

이므로 $a=4,\ b=-17$

따라서 $f(x)=4n-7$ 은 같은차수렬

$$S_n=\frac{(-13+14n-17)\cdot n}{2}=n(2n-15)$$

15. 1) $a_{k+1}=2a_k+a_{k+2}(k\in \mathrm{N})$라고 하자. 주어진 방정식은

$$a_kx^2+(a_k+a_{k+2})x+a_{k+2}=0$$

이므로 $(a_kx+a_{k+2})(x+1)=0$

따라서 $k\in \mathrm{N}$에 대하여 $x=-1$은 방정식의 풀이이다.

2) 방정식의 다른 풀이는 $-\frac{a_{k+2}}{a_k}$이므로

$$-\frac{a_{k+2}}{a_k}=-\frac{a_k+2d}{a_k}=-1-\frac{2d}{a_k}$$

따라서 $a_k=-1-\frac{2d}{a_k}$ (다른 풀이)이므로 $\frac{1}{a_k+1}=-\frac{a_k}{2d}$

$$\frac{1}{a_k+1}-\frac{1}{a_{k-1}+1}=-\frac{1}{2d}(a_k-a_{k-1})=-\frac{1}{2d}\cdot d=-\frac{1}{2}$$

이로부터 $\left\{\frac{1}{a_k+1}\right\}$ 은 같은차수렬이라는것을 알수 있다. 이때 공통차는 $-\frac{1}{2}$이다.

16. 1) $af(2)-bf(1)=1,\ f(1)=0$이므로 $f(2)=\frac{1}{a}$

$af(3)-bf(2)=1$이므로 $f(3)=\frac{a+b}{a^2}$

$af(4)-bf(3)=1$이므로 $f(4)=\frac{a^2+ab+b^2}{a^3}$

2) $f(n)=\frac{a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+ab^{n-3}+b^{n-2}}{a^{n-1}}$

$$=\frac{\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}}{a^{n-1}}=\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{(a-b)a^{n-1}}\qquad *)$$

(증명) 수학적귀납법을 리용한다.

(1) $n=1$일 때 $f(1)=\dfrac{a^0-b^0}{(a-b)a^0}=0$이므로 식 *)이 옳다.

(2) $n=k$일 때 식 *)가 옳다고 하자. 즉

$$f(k)=\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{(a-b)a^{k-1}}$$

$n=k+1$일 때 $af(k+1)-bf(k)=1$이므로

$$f(k+1)=\frac{1+bf(k)}{a}=\frac{1}{a}\left[1+b\cdot\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{(a-b)a^{k-1}}\right]$$

$$=\frac{a^k-b^k}{a^k(a-b)}=\frac{a^{(k-1)-1}-b^{(k-1)-1}}{(a-b)a^{(k-1)-1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때 식 *)이 옳다.

(1)과 (2)로부터 $\forall n\in\mathrm{N}$에 대하여 식 *)이 성립한다.

7.

2) 련습문제

1. D 2. B 3. D 4. C 5. A 6. 16 7. $\dfrac{27}{14}\pi$ 8. $n=6$

9. 12 10. 3, 1 11. $a+b+1=0$, $\left(-\dfrac{3}{4},\ +\infty\right)$

12. $(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\dfrac{n\pi}{4}+i\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$

1) $(1+i)^n$은 실수이다.

$\therefore\ \sin\dfrac{n\pi}{4}=0\ \Rightarrow\ \dfrac{n\pi}{4}=k\pi\ \Rightarrow\ n=4k\ (n\in\mathrm{N})$

따라서 n의 최대값은 4, 대응하는 실수는 -4이다.

2) $(1+i)^n$가 순허수라고 하면 $\cos\dfrac{n\pi}{4}=0$이고 $\sin\dfrac{n\pi}{4}\neq 0$이다.

즉 $\dfrac{n\pi}{4}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ n\pi=4k\pi+2\pi\ (n\in\mathrm{N})$

$\therefore\ n=4k+2$

따라서 n의 최소값은 2, 대응하는 허수는 $2i$이다.

13. 그림 14-5와 같이

$$Z_{\mathrm{OD}} = Z_{\mathrm{OA}}\sqrt{3}\left(\cos(\pm 90°) + i\sin(\pm 90°)\right)$$
$$= (2+2i)\left(1+\sqrt{3}i\right)$$

즉 $-2+2\sqrt{3}i$ 또는 $2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$

그림 14－5

14. $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=6$,

$y = x^2+\dfrac{1}{x^2}$ 이라고 하면

$y^2+y-6=0 \Rightarrow y=2$ 또는 $y=-3$ 즉

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=2 \Rightarrow x_1=x_2=1,\ x_3=x_4=-1$,

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=-3 \Rightarrow x_{5,\,6}=\dfrac{\sqrt{5}\pm 1}{2}i,\ x_{7,\,8}=-\dfrac{\sqrt{5}\pm 1}{2}i$

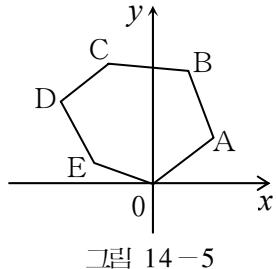
15. $2\,\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=\dfrac{z-1}{z+1}+\overline{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)}=\dfrac{z-1}{z+1}+\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=\dfrac{z-\bar{z}-\bar{z}-z}{(z+1)(\bar{z}+1)}=0$

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=0,\ z\neq\pm 1 \quad \therefore\ \dfrac{z-1}{z+1}\neq 0$

따라서 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 은 순허수

16. 1) (충분성) $|z|=n$ 이라고 하면 $\bar{z}z=|z|^2=u^2$

따라서 $\dfrac{z^2+u^2}{2}=\dfrac{z^2+\bar{z}z}{z}=z+\bar{z}$ 는 실수

(2) (필요성) $\dfrac{z^2+u^2}{z}=\dfrac{z^2\bar{z}+u^2\bar{z}}{z}$ 가 실수라고 하면

$$|z|^2\bar{z}+u^2\bar{z}=|z|^2\cdot(a+bi)+u^2(a-bi)$$

는 실수이다.

$\therefore\ b\left(|z|^2-u^2\right)=0$

그런데 $b\neq 0,\ u>0$ 이므로 $|z|=u$ 가 성립한다.

17. $|z_1|^2=1+2\cos 2(1+a)+\cos^2 2(1+a)+\sin^2 2(1+a)$

$$= 2 + 2\cos 2(1+a),$$

$$|z_2|^2 = 1 - 2\cos 2(1-a) + \cos^2 2(1-a) + \sin^2 2(1-a)$$

$$= 2 - 2\cos 2(1+a)$$

$$\therefore\ |z_1|^2 - |z_2|^2 = 2[\cos 2(1+a) + \cos(1-a)] = 4\cos 2\cdot\cos 2a < 0$$

그런데 $\cos 2 < 0\ (0 < a < 1)$, $\cos 2a > 0$이므로 $|z_1|^2 < |z_2|^2$

$$\therefore\ |z_1| < |z_2|$$

18. $z_2^2 = z_1 \cdot z_3 \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$

1) $z_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^{n-1} = \cos\dfrac{n-1}{6}\pi + \sin\dfrac{n-1}{6}\pi$

2) $1 + \left[\dfrac{100}{6}\right] = 17$ (마디), 합은 1이다.

3) $1 + \left[\dfrac{100}{6}\right] = 17$ (마디), 합은 i이다.

19. 1) 원의 중심은 원점이고 반경이 a인 원
2) 중심이 (1, 1)이고 실축이 $y = x$인 쌍곡선

20. $z = \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$라고 하면 $z^7 = 1$,

$$\left(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}\right) + i\left(\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7}\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{7} + i\sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{5\pi}{7} + i\sin\frac{5\pi}{7}\right)$$

$$= z + z^3 + z^5 = \frac{z(1-z^6)}{1-z^2} = \frac{z - z^7}{1-z^2} = \frac{z+1}{1-z^2} = \frac{1}{1-z}$$

$$= \frac{1}{1 - \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}}{2 - 2\cos\frac{\pi}{7}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{i}\cot\frac{\pi}{14}$$

$$\therefore\ \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

21．$z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2=4,\ z_2\cdot\overline{z_2}=|z_2|^2=9$ 이므로

$$z_1\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}=6[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$$
$$+6[\cos(\beta-\alpha)+i\sin(\beta-\alpha)]$$
$$=12[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$$

조건 $z_1\cdot\overline{z_1}-z_1\cdot\overline{z_2}-\overline{z_1}\cdot z_2+z_2\cdot\overline{z_2}=7$ 로부터

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\angle AOB=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

3) 자체시험문제

1．40　2．0　3．$\{1+3i,1-3i\}$　4．$4-3i$　5．$\frac{3-\sqrt{3}}{2}-\frac{3+\sqrt{3}}{2}i$

6．B　7．B　8．D　9．C　10．D　11．1)（그림 14-6） 2)（그림 14-7)

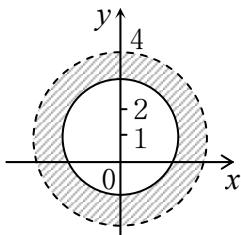
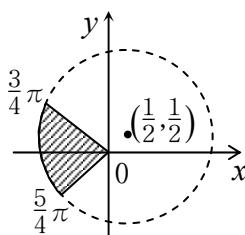



그림 14－6　　그림 14－7

12．$z=a(\cos\theta+i\sin\theta)$라고 하면 $\frac{1}{z}=\frac{1}{a}(\cos\theta-i\sin\theta)$

또한 $\frac{1}{2}\left(z+\frac{a^2}{z}\right)=x+iy\ (x,\ y\in\mathrm{R})$라고 하면

$$x+iy=\frac{1}{2}\left(a\cos\theta+ia\sin\theta+a\cos\theta ia\sin\theta\right)=a\cos\theta$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=0\end{cases}$$

$\therefore\ z=a\cos\theta$

즉 자리길은 x축에서 중심이 원점이고 길이가 $2a$인 선분이다.

13. $|z_1|=1$이라고 하면

$$\text{왼변}=\frac{1}{|z_1|}\left|\frac{z_1-z_2}{1-\bar{z}_1z_2}\right|=\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-|z_1|^2z_2}\right|=\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-z_2}\right|=1$$

조건이 $|z_2|=1$인 경우도 마찬가지로 증명할수 있다.

14. $\left(2^{x+y}-32\right)+\left(\log_6 x+\log_6 y-1\right)i=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}2^{x+y}=32\\ \log_6 xy=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ y_1=3\end{cases}\text{ 또는 }\begin{cases}x_2=3\\ y_2=2\end{cases}$$

8.

2) 련습문제

1. 2, 17 2. $A_5^2-2A_4^1+1=13$ 3. 1 4. $\pm\sqrt{2}i$ 5. 165 6. 1) $C_9^2=36$ 2) $C_4^1\cdot C_5^2+C_5^1\cdot C_5^2+2=72$ 3) $C_4^1\cdot C_5^3+C_4^2\cdot C_5^2+C_4^3\cdot C_5^1=120$ 4) $C_4^1\cdot C_5^4+C_4^4\cdot C_5^1=25$ 5) $C_4^1\cdot C_5^5=4$ 7. 1) $C_7^1\cdot C_9^4=882$ 2) $C_7^1\cdot C_9^4+C_7^2\cdot C_9^3+C_7^4\cdot C_9^1+C_7^5=4242$ 3) $C_9^5+C_9^4\cdot C_7^1+C_9^3\cdot C_7^2=2646$ 4) $C_{15}^5=3003$ 5) $C_{14}^3=364$ 6) $C_{14}^4\cdot C_2^1=2002$ 7) $C_7^2\cdot C_9^3+C_7^4\cdot C_9^1=2079$

8. $\begin{cases}\dfrac{m}{n-m+1}=\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{m+1}{n-m}=\dfrac{3}{4}\end{cases}\quad\therefore\ n=34,\ m=14$

9. 1) $x>4$ 2) $7<x\le 12$ 10. $3432a^7b^7$ 11. $C_9^4\cdot C_5^3\cdot 8=10080$

12. $9^n = 3^{2n} = (2+1)^{2n} = 4^n + 2n \cdot 2^{2n-1} + \mathrm{C}_{2n}^{2} 2^{2n-2} + \cdots + 4n + 1$

$\therefore\ 9^n > 4^n + n \cdot 2^{2n} = (n+1) \cdot 4^n$

3) 자체시험문제

1. C 2. B 3. B 4. $n = 2, 3, 4, 5, 6$ 5. $\mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{A}_5^3 = 600$

6. $x = 2,\ y = -\dfrac{1}{2},\ n = 7$

9.

2) 련습문제

1. B 2. A 3. 있다. 대응하는 두 점들을 맺는 선분의 수직2등분선들의 사귐점이 회전중심이다.

4. (그림 14-8)

A와 E에서 BC에 그은 수직선의 밑점을 A_1, E_1라고 하면

$$EE_1 = AA_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BE$$

그림 14－8

따라서 직3각형 EBE_1에서 $EE_1 = \dfrac{1}{2}BE$이므로

$$\angle EBE_1 = 30°,\quad \angle BEC = \frac{150°}{2} = 75°$$

$$\angle EFC = 90° - \angle ABF = 90° - (45° - 30°) = 75°$$

따라서 △CEF는 2등변3각형이다.

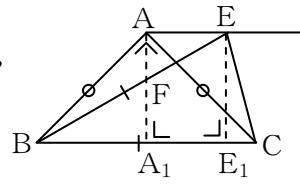
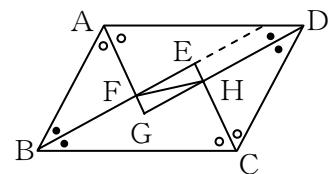
5. 그림 14-9에서 EFGH가 직4각형이라는것을 쉽게 증명할수 있다. FE를 연장하여 AD와의 사귐점을 D_1라고 하면 $\triangle AFD_1 = \triangle CDH$이므로

$$FD_1 = HD$$

한편 BE∥DG이므로 $FD_1 = HD$이며 평행이다. 따라서 4각형 DD_1FH도 평행4변형이다.

$\therefore\ FH = DD_1 = AD - AD_1 = AD - AB$

그림 14－9

6. 그리려는 △ABC의 정점 A에서 나가는 가운데선, 2등분선, 높이의 연장선과 외접원의 사귐점을 각각 D, E, F라고 하고 외심을 O라고 하자. 활줄에 수직인 직경은 그 활줄과 활등을 2등분하므로 변 BC의 가운데점을 O_1라고 하면 $OO_1 \perp BC$이고 OO_1에 E가 놓이며 OO_1 ∥AF이다.

그리하여 AO_1의 연장선이 원둘레와 사귀는 점이 D로 된다.
(그리기)
① 점 D, E, F가 놓이는 즉 △DEF의 외접원의 중심 O를 찾고 외접원을 그린다.
② 점 O와 E를 맺는다.
③ 점 F에서 OE에 평행인 직선을 그어 원둘레와의 사귀는 점을 A라고 한다.
④ 점 A와 D를 맺고 OE와의 사귐점을 O_1라고 한다.
⑤ 점 O_1를 지나며 OO_1에 수직인 직선을 그어 원둘레와의 사귐점을 B, C라고 한다. 이때 △ABC가 그리려고 하는 3각형이다.

7. (략함) 8. (략함)

9. 그림 14-10에서와 같이 O O′를 맺는 직선이 원둘레 O′와 사귀는 점을 F, D, 원둘레 O와 사귀는 점을 E, C라고 하면

$S_1=S_{부채형PCQ}-S_{부채형PDQ}$,

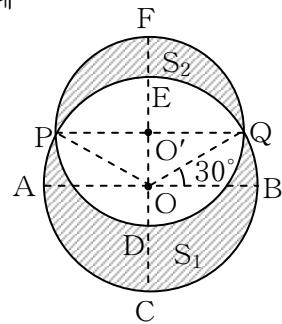
$S_2=S_{반원\ PCQ}-S_{부채형PCQ}$

그리고 반원 PDQ와 반원 PFQ의 면적은 같으므로

그림 14－10

$$S_1+S_2=S_{부채형PCQ}-S_{부채형PEQ}=S_{원\ O}-2\times S_{부채형PEQ}$$

$$=S_{원\ O}-2(S_{부채형\ OPQ}-S_{\Delta OPQ})=\pi a^2-2(\frac{\pi}{3}a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2)$$

$$\therefore\ S_1+S_2=(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2})a^2$$

10. AO의 연장선에 AO=OB되는 점 B를 찍으면 B는 일정한 점이다. 원 O의 반경을 r라고 하고 조건에 맞는 점 P를 찍으면

$$AQ=QP$$

$\therefore$ BP=2OQ=$2r$ (일정)

즉 점 P는 B를 중심으로 하고 반경이 $2r$인 원둘레에 있다. 거꾸로 원둘레 B의 임의의 점을 P라고 하고 AP의 가운데점을 Q라고 하면

$$AO=OB,\ AQ=QP$$

$$\therefore\ OQ=\frac{1}{2}BP=\frac{1}{2}\cdot 2r$$

즉 Q는 원둘레 O의 점이며 조건에 맞는다. 따라서 자리길은 점 B

를 중심으로 하고 반경이 $2r$인 원이다.

3) 자체시험문제

1. B
2. 세 변을 a, b, c라고 하면 DE//BC이므로

그림 14－11

$$\mathrm{DE}=\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c$$

한편 $\mathrm{DE}=\frac{2}{3}a$

$$\therefore\ \frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c=\frac{2}{3}a$$

$$\therefore\ b+c=2a$$

즉 변 BC의 2배가 나머지 두 변의 합과 같은 3각형이다.(2등변3각형, 직3각형, 바른3각형이 될수 없다는것은 쉽게 나온다.)

3. (그리기)

① AB를 직경으로 하는 원둘레를 그린다.

② B를 중심으로 평행직선사이거리를 반경으로 하는 원둘레를 그려 두 원둘레의 사귐점을 P라고 한다.

③ P와 F를 맺는 직선을 긋고 점 E에서 이 직선에 평행인 직선을 그어 주어진 두 평행직선과의 사귐점을 A, B, C, D라고 하면 4각형 ABCD는 등변4각형이다.

4. (략함) 5. (략함)
6. 조건에 맞는 점 P를 찍으면

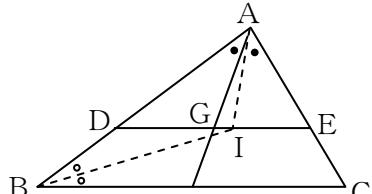
$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}(\text{일정})$$

즉 점 P는 A를 중심으로 하고 반경이 $\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$인 원둘레에 있다. 거꾸로 원둘레 A의 임의의 점을 P라고 하고 점 P, B, C를 지나는 원 O를 그리면

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}$$

즉 AP는 원둘레 O의 점 P에서 접하며 조건에 맞는다. 따라서 구하려는 자리길은 점 A를 중심으로 하고 반경이 $\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$인 원둘레이다. 여기서 원둘레 A와 직선 AC가 사귀는 점 D, E는 제외한다.

7. 원의 면적을 S, 빗선친 부분의 면적을 S′라고 하면

$$\mathrm{S}=\pi\cdot\left(\frac{\mathrm{AB}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{AB}^2$$

$$S' = \pi\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{AD}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{AC}{2}\right)^2\right) + \left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{CB}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{DB}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(AD^2 - AC^2 + CB^2 - DB^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left((AD + AC)(AD - AC) + (CB + DB)(CB - DB)\right)$$

$AD - AC = CB - DB = CD$ 이므로

$$S' = \frac{\pi}{8}CD(AD + AC + CB + DB)$$

$$= \frac{\pi}{8}\cdot CD \cdot 2AB = \frac{\pi}{4}CD \cdot AB$$

$$\therefore\ S' : S = \frac{\pi}{4}CD : AB : \frac{\pi}{4}AB^2 = CD : AB$$

8. (략함)

9. BC＝a, AB＝b 라고 하고 C를 A에 겹쳐놓았을 때의 접은 자리의 선을 PQ라고 하면 PQ는 AC를 수직2등분한다.(그림 14-12)

$$a > b$$

따라서 AB＜BC이므로 점 B는 PQ에 대하여 A와 같은쪽에 있다. 따라서 PQ는 BC와 사귄다. 마찬가지로 PQ는 변 AD와 사귄다.

그림 14－12

AP＝x 라고 하면 PC＝x

$$BP = a - x$$

∠ABP＝∠R로부터

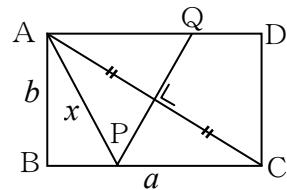
$$AP^2 = AB^2 + BP^2$$

$$\therefore\ x^2 = b^2 + (a - x)^2$$

$$\therefore\ x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

PQ, AC의 사귐점을 O라고 하면

$$AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

PO⊥AC로부터

$$PO^2 = AP^2 - AO^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4a^2} - \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{b^2(a^2+b^2)}{4a^2}$$

$$\therefore\ PO = \frac{b^2(a^2+b^2)}{4a^2} = \frac{b}{2a}\sqrt{a^2+b^2}$$

점 O는 변 AC의 가운데점으로서 직4각형의 중심이므로

$$PO = OQ$$

$$\therefore\ PQ = 2PO = \frac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}$$

10.

2) 련습문제

1. (지시) 두 평행선이 결정하는 평면과 주어진 평면은 반드시 하나의 사귐점을 가진다. 평행선들가운데서 다른 한 직선은 반드시 이 사귐점을 가진다.
2. (략함)
3. BE⊥AC되게 그으면 DE⊥AC를 증명할수 있다.

$$S^2_{\Delta ABC} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

$$\therefore\ S_{\Delta ACD} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$$

4. 1) (략함) 2) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ 5. $d = \sqrt{(a^2-b^2)\tan^2\alpha + b^2}$
6. 직3각형 ASD에서 $SD^2 = AD \cdot OD$의 관계로부터
   $S^2_{\Delta SDC} = S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta OBC}$
7. $(\sqrt{3}+1)a^2$ 8. $2\sqrt{15}$ 9. $\frac{80\sqrt{3}}{3}\ \mathrm{cm}^3$ 10. 1) $\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 3) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$ 4) $\arcsin\frac{\sqrt{30}}{6}$ 11. $\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)S$
12. $21\sqrt{55}$, $\frac{3}{4}\sqrt{55}$

3) 자체시험문제

1. B 2. A 3. A 4. C 5. B 6. C 7. A 8. $\arctan\frac{4}{3}$, 3cm

9. $2\sqrt{3}a$ 10. $\frac{\pi}{6}+\arcsin\frac{1}{4}$ 11. $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}a$

12. $\sqrt{a^2+3b^2}$ 13. $\arctan\frac{3}{4}$ 14. 1 344cm^3 15. $20(\sqrt{2}+1)$

16. $\frac{1}{6}abh$ 17. (략함) 18. (지시) 먼저 BD⊥AC임을 증명한다.

19. AE=1 또는 2 20. 768cm^2 21. 1) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ 2) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$

22. 1) (략함) 2) $\frac{a^3}{6}$ 23. 1) $\arctan\frac{\sqrt{30}}{3}$ 2) $16\sqrt{3}$ 3) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{30}$

11.

2) 련습문제

1. A 2. D 3. B 4. B 5. 있다 6. $\sqrt{406}$ 7. 2 8. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

9. $25\vec{i}+5\vec{j}+35\vec{k}$ 10. $\frac{5}{6}$

11. AC의 경사도를 k라고 하면

$$\tan 45^\circ=\frac{1-k}{1-3k}$$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

AC의 방정식은 $y-\frac{2}{5}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{14}{5}\right)$

AB의 방정식은 $y-\frac{2}{5}=-2\left(x-\frac{14}{5}\right)$

련립방정식을 풀면 C는 $\left(-\frac{16}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$

거리공식을 리용하면

$$|AC| = 2\sqrt{5}, \quad S = \frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{5}\right)^2 = 10$$

12.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & k & -3 \\ 3k & 4 & -5 \end{vmatrix} = 3k^2 + 13k - 16 = 0$$

$\therefore\ k = 1,\ k = -\frac{16}{3}$

13. 점 P의 자리표를 $(x, 0)$이라고 하면

$AP^2 + BP^2 = (x-4)^2 + (x-6)^2 + 9 = 2(x-5)^2 + 12$

$x = 5$일 때 최소값 12

$\therefore$ P(5, 0)

14. A($-a$, 0), B(b, 0), C(0, c)라고 하면

$D_x = \frac{b+0}{1+\lambda}, \quad D_y = \frac{0+\lambda c}{1+\lambda}, \quad E_x = \frac{-\lambda a}{1+\lambda}, \quad E_y = \frac{c}{1+\lambda},$

$F_x = \frac{-a+\lambda b}{1+\lambda}, \quad F_y = 0$

△ABC의 무게중심 $G\left(\frac{-a+b+0}{3}, \frac{0+0+c}{3}\right)$ 즉 $G\left(\frac{b-a}{3}, \frac{c}{3}\right)$

△DEF의 무게중심

$$G'\left(\frac{1}{3}\left(\frac{b}{1+\lambda} + \frac{-\lambda a}{1+\lambda} + \frac{-a+\lambda c}{1+\lambda}\right), \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda c}{1+\lambda} + \frac{c}{1+\lambda} + 0\right)\right)$$

즉 $G'\left(\frac{b-a}{3}, \frac{c}{3}\right)$

따라서 같은 중심을 가진다.

15. 직선의 방정식을 $y = kx,\ y - 3 = k(x-1)$이라고 하자.

두 직선사이거리가 $\sqrt{5}$이므로 $\frac{k-3}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{5}$

$\therefore\ k = \frac{1}{2},\ k = -2$

구하려는 직선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$ 와 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 또는 $y=-2x$ 와 $2x+y-5=0$

16. 직선의 방정식이 $y-1=k(x-3)$ 이라고 하면 련립방정식

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ y=k(x-3)+1 \end{cases}$$

을 풀면 $x=\frac{6k-1}{1+2k}$, $y=\frac{1-2k}{1+2k}$

련립방정식

$$\begin{cases} x+2y-3=0 \\ y=k(x-3)+1 \end{cases}$$

을 풀면 $x=\frac{6k+1}{1+2k}$, $y=\frac{1}{1+2k}$

가운데점의 자리표는 $\left(\frac{6k+1}{1+2k}, \frac{1-k}{1+2k}\right)$

이 점이 직선 $x-y-1=0$ 에 놓이므로

$$\frac{6k+1}{1+2k}-\frac{1-k}{1+2k}-1=0$$

$$k=\frac{2}{5}$$

따라서 구하려는 직선의 방정식은 $2x-5y-1=0$

17. 차례로 이루는 각을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha$ 라고 하면 $0<4\alpha<\pi$ 이므로

$$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$$

$\tan\alpha=\frac{3}{4}$ 이므로

$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$ 즉 $\tan\alpha=\frac{1}{4}$

$$\tan 3\alpha=\frac{\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{13}{9}, \quad \tan 4\alpha=\frac{24}{7}$$

따라서 구하려는 방정식은 $y-6=\frac{1}{3}(x-8)$ 즉

$$x-3y+10=0,\ y-6=\frac{13}{9}(x-8)$$

즉 $13x-9y-50=0,\ y-6=\frac{24}{7}(x-8)$

따라서 $24x-7y-150=0$

18. $y=x^2+k$를 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$에 갈아넣으면

$$2x^4+(4k+1)x^2+2(k-1)=0$$

포물선과 타원은 서로 다른 4개의 사귐점을 가진다. 즉 우의 방정식이 서로 다른 4개의 실수풀이를 가진다. 그 조건은

$$\mathrm{D}=(4k+1)^2-4\cdot 2\cdot 2(k^2-1)>0$$

즉 $k^2-1>0,\ 4k+1<0$

$\therefore\ -\frac{17}{8}<k<-1$

k가 이 구간에서 값을 가질 때 그 매개 사귐점의 자리표는

$$x^2-y+k=0 \qquad ①$$

$$x^2+2y^2-2=0 \qquad ②$$

을 만족한다.

①+②하면

$$2x^2+2y^2-y+k-2=0 \text{ 즉 } x^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\sqrt{\left(\frac{17}{16}-\frac{k}{2}\right)^2}$$

즉 원을 표시한다.

따라서 매개 사귐점은 모든 방정식을 만족한다.

19. $x=2$를 점근선방정식 $y=\frac{3}{2}x$에 갈아넣으면 $y=3$

점 P의 세로자리표가 3보다 크므로 점 P는 점근선 $y=\frac{3}{2}x(x>0)$과 y축의 정방향으로 둘러싸인 구역에 놓이고 그의 실축은 반드시 y축에 놓인다.

그의 표준방정식은 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$이다.

$\therefore\ \frac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{a^2}-\frac{2^2}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2}=1$

$\therefore\ a^2=9,\ b=4$

따라서 구하려는 방정식은 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

20. $z_1=x+yi$, $z_2=x'+y'i$라고 하면

$$x+yi=(x'+y'i)i+3=(3-y')+x'i$$

$\therefore\ x=3-y',\ y=x'$ 즉 $\sqrt{(x'-5)^2+y'^2}-\sqrt{(x'+5)^2+y'^2}=6$

$$16x'^2-9y'^2=144\ (x\le -3)$$

$$16y^2-9(3-x)^2=144$$

즉 구하려는 자리길방정식은

$$16y^2-9(3-x)^2=144\ (y\le -3)$$

따라서 (3, 0)이 중심인 쌍곡선 아래쪽의 한가지이다.

21. P＝2C이므로 곡선 C_2: $y=4cx$를 갈아넣으면

$$\mathrm{M}x=\frac{a^2-ac}{a+c}$$

M을 지나며 C_2의 기준선 $x=-c$에 수직선을 긋고 그 밑점을 N이라고 하면

$$\left|\mathrm{MF_2}\right|=\left|\mathrm{MN}\right|=c+\frac{a^2-ac}{a+c}=\frac{a^2+c^2}{a+c},$$

$$\left|\mathrm{MF_1}\right|=2a-\frac{a^2+c^2}{a+c}=\frac{a^2+c^2+2ac}{a+c}$$

즉 $\cos\angle\mathrm{MF_1F_2}=\frac{\left|\mathrm{F_1M'}\right|}{\left|\mathrm{MF_1}\right|}$ (M′는 M에서 x축에 그은 수직선의 밑점),

$$\cos\angle\mathrm{MF_2F_1}=\frac{\left|\mathrm{MM'}\right|}{\left|\mathrm{MF_2}\right|},$$

$$\cos\angle MF_2F_1 \cdot \cos\angle MF_1F_2 = \frac{ap-b^2}{b^2+ap}$$

22. 1) $-2(x-1)+2(z+2)=0$ 또는 $x-z+3=0$

2) $-2(x-2)-6(y-6)+(z+1)=0$

또는 $3x+6y-z-43=0$

23. $\frac{2}{9}$ 24. $\frac{x-8}{102}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{136}$

25. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=9$

3) 자체시험문제

1. C 2. B 3. B 4. A 5. C 6. D 7. C 8. A 9. B 10. C

11. $\frac{\pi}{3}$ 12. $\left\{\frac{7}{3}, -3\right\}$ 13. (−8, 6, 0) 14. 13 15. $2x-y-7=0$

16. 점 D가 원점이 되도록 공간자리표계를 만들자.

1) A(2, 0, 0), B(2, 3, 0), D_1(0, 0, 2), C(0, 3, 0), A_1(2, 0,2) 이므로 E(1, 3, 0)

$\therefore\ \overrightarrow{AD_1}=\{-2,\ 0,\ 2\}$, $\overrightarrow{A_1E}=\{-1,\ 3,\ 2\}$

$\overrightarrow{AD_1}$ 와 $\overrightarrow{A_1E}$ 사이의 각을 θ라고 하자.

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1E}\right|}=\frac{2+0-4}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{14}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$ 이므로

$$\theta=\pi-\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$$

따라서 AD_1와 AE_1사이의 각은 $\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$

2) 점 F의 자리표를 $(x,\ y,\ 0)$이라고 할 때

$$\overrightarrow{AF}=\{x-2,\ y,\ 0\},\ \ \overrightarrow{FC_1}=\{-x,\ 3-y,\ 0\}$$

한편 점 A, F, C는 한 직선에 놓이므로 $\overrightarrow{AF}\,/\!/\,\overrightarrow{FC}$

$\therefore\ \frac{x-2}{-x}=\frac{y}{3-y}$

$\therefore\ 3x+2y=6$

$\overrightarrow{D_1F}=\{x, y, -2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-2, 3, 0\}$, $D_1F \perp AC$이므로

$$\overrightarrow{D_1F}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x+3y=0$$

따라서 $\begin{cases}3x+2y=6\\-2x+3y=0\end{cases}$ 이므로

$$\begin{cases}x=\dfrac{18}{13}\\ y=\dfrac{12}{13}\end{cases}\quad 즉\ \overrightarrow{D_1F}=\{\frac{18}{13}, \frac{12}{13}, -2\}$$

17. 1) $x=0,\ \dfrac{4m-1}{m^2-m}=-1$

$\therefore\ m=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

2) $2m^2+m-3=0,\ m=-\dfrac{3}{2},\ m=1$ (버린다.)

3) $-\dfrac{2m^2+m-3}{m^2-m}=\dfrac{2}{3},\ m=-\dfrac{9}{8}$

4) $\left|\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2m^2+m-3}{m^2-m}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2m^2+m-3}{m^2-m}}\right|=3$

$m^2+2m-3=0$ 과 $5m^2-8m+3=0$

$\therefore\ m=-3,\ m=\dfrac{3}{5}$

18. 점 (2, 3)으로부터 $2x+y+3=0$ 까지의 거리가

$$-\frac{2\cdot2+3+3}{-\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$$

따라서 $2x+y+3=0$ 의 임의의 점과 점 (2, 3)의 거리가 $2\sqrt{5}$ 보다 크다. (혹은 같다.) 즉 안갈기식이 성립한다.

19. 점 B의 자리표를 (x_1, y_1)이라고 하면 $3x_1-4y_1-1=0$ 을 만족시킨다. 점 A가 선분 BC의 가운데점이므로 점 C의 자리표는 $(-6-x_1, 4-y_1)$이고 점 C는 $3x+2y-13=0$ 을 만족한다.

$$3(-6-x_1)+2(4-y_1)-13=0$$

$\therefore\ x_1=-5,\quad y_1=-4$

구하려는 직선 l의 방정식은 $3x-y+11=0$ 이다.

20. 1) $y^2=x-1\ (x>0)$,

$y^2=-(x+1)\ (x<0)$ (그림 14-13)

2) $\sqrt{x^2-1}(y^2-1)=0$

그림 14－13

21. 1) $\alpha=0,\ y=\pm1$

2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{\sin\alpha}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=1$ (초점은 x축에 있다.)

3) $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $x^2+y^2=\sqrt{2}$ (원)

4) $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, 초점이 y축에 있는 타원

5) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pm1$

6) $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{\sin\alpha}}-\dfrac{y^2}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=1$ (초점이 x축에 있는 쌍곡선)

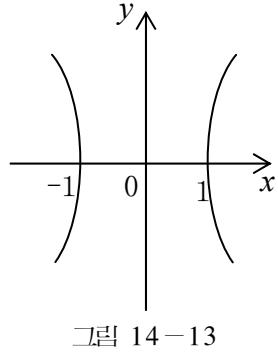
7) $\alpha=\pi$ 자리길은 없다.

22. 준선의 방정식으로부터 타원의 초점은 y축에 있다.

$$\frac{a^2}{c}=\frac{25}{4},\ \frac{c}{a}=\frac{4}{5}\ \text{즉}\ a=5,\ c=4,\ b=3$$

타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$

타원의 한 점 $\mathrm{A}\left(x,\ \dfrac{5}{3}\sqrt{9-x^2}\right)$을 직4각형의 한 정점이라고 하면

A를 정점으로 하는 내접직4각형의 면적은 $S=4x\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\sqrt{9-x^2}$ 즉

$$S^2=\frac{400}{9}\left(-x^4+9x^2\right)=\frac{400}{9}\left(-\left(x^2-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}\right)$$

$$x^2=\frac{9}{2} \text{ 일 때 } S^2_{최대}=900$$

즉 가장 큰 직4각형의 면적은 30

23. $y=ax$에 수직인 직선은 $y=-\frac{x}{a}+b$ (b는 미정상수)

곡선의 방정식에 갈아넣으면

$$y^2+(2+a)y-ab=0$$

$$\therefore \ y_1+y_2=-2(2+a)$$

$$\therefore \ y=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{a+2}{2}, \ x=ab+\frac{a(a+2)}{2}$$

$y=ax$에 갈아넣으면

$$b=\frac{-2-a-2a^2-a^3}{2a^2} \qquad *)$$

$y^2+(2+a)y+4ab=0$이 풀이를 가지도록 하자면 반드시

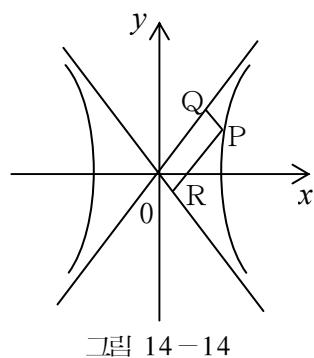
$$(2+a)+4ab>0$$

식 *)에 갈아넣으면

$$\frac{-a^3+2a-4}{a}>0 \text{ 즉 } -2<a<0$$

24. 직각자리표계를 설정하면 그림 14-14와 같다.

그림에서 평행4변형 OQPR의 한 변

OQ는 쌍곡선의 점근선 $y=\frac{b}{a}x$에 있고

점 P의 자리표는 $(x_0, \ y_0)$, OR는

$y=-\frac{b}{a}x$에 있다고 하자. PQ가 놓이는

직선의 방정식은

$$y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0)$$

그림 14-14

$y=\frac{b}{a}x$를 갈아넣으면 Q의 자리표는

$$\left(\frac{bx_0+ay_0}{2b}, \frac{bx_0+ay_0}{2a}\right)$$

$$\therefore\ S_{OQPR}=2S_{\triangle OPQ}=2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ \frac{bx_0+ay_0}{2b} & \frac{bx_0+ay_0}{2a} & 1 \end{vmatrix}=\frac{ab}{2}\ (\text{상수})$$

25. 점 C의 자리표를 (x', y'), AC의 방향결수(경사도)를 k_1, BC의 방향결수를 k_2 이라고 하자.

$$k_1=\frac{y'}{x'-a},\ k_2=\frac{y'}{x'+a},\ \tan\angle ACB=\tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1$$

$$\frac{\frac{y'}{x'-a}-\frac{y'}{x'+a}}{1+\frac{y'}{x'-a}\cdot\frac{y'}{x'+a}}=\pm 1$$

$$x'^2+y'^2+2ay'-a^2=0$$

G(x, y)를 △ABC의 무게중심이라고 하면(그림 14-15)

$$OG=\frac{1}{3}OC \qquad *)$$

이므로 $x=\frac{x'}{3},\ y=\frac{y'}{3}$

식 *)에 갈아넣으면 C가 x축웃쪽에 놓일 때

$$x^2+\left(y-\frac{a}{3}\right)^2=\frac{2}{9}a^2$$

C가 x축아래쪽에 놓일 때

$$x^2+\left(y+\frac{a}{3}\right)^2=\frac{2}{9}a^2$$

y
O₁
0
x
O₂

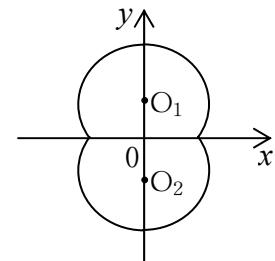



그림 14－15

26. $2(x+3)+3(y+2)-4(z-2)=0$ 27. $9x-y+7z-40=0$

28. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{5}$ 29. $\varphi=\arcsin\frac{18}{91}$ 30. $\left(0,\ \frac{5}{4},\ 0\right)$,

$R=\dfrac{\sqrt{89}}{4}$

12.

2) 련습문제

1．C　2．B　3．B　4．C　5．C　6．1) $\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$　2) $\dfrac{C_4^2\times C_3^1}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$

7．1) $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{3}{20}$

2) A, B, C가 불합격으로 되는 확률은 각각

$$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5},\ 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

이므로 A와 B만이 합격되는 확률은

$$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{10}$$

B와 C만이 합격되는 확률은

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

A와 C만이 합격되는 확률은

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{20}$$

따라서 우의 사건들은 서로 배반사건이므로 구하려는 확률은

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{9}{20}$$

3) 세 사람 다 불합격되는 확률은 $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{15}$

적어도 한명이 합격되는 사건은 3명이 다 불합격되는 사건의 나머지사건이므로

$$1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$$

8．B, C가 일어날 확률을 각각 P_1, P_2라고 하면 문제의 조건으로부터

$$\frac{1}{2}\times P_1\times P_2=\frac{1}{24} \qquad ①$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-P_1)(1-P_2)=\frac{1}{4} \qquad ②$$

식 ①, ②로부터

$$P_1=\frac{1}{3},\ P_2=\frac{1}{4} \text{ 또는 } P_1=\frac{1}{4},\ P_2=\frac{1}{3}$$

9.

X	0	1	2	3	계
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

10. X의 확률분포는 $n=60,\ p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{6}$ 인 2마디분포이므로 기대값은

$$m=n\cdot p=60\cdot\frac{1}{6}=10\text{ (번)}$$

표준편차는

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{60\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{5}{6}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\approx 2.89$$

믿음도가 95.4％이므로

$$58.6-2\cdot 0.5\le m\le 58.6+2\cdot 0.5 \text{ 즉 } 57.6\le m\le 59.6$$

13.

2) 련습문제

1. B 2. C 3. D 4. D 5. D 6. B 7. A 8. C 9. C 10. B

11. 3 12. $\begin{cases} a & (a>b\text{일 때}) \\ a \text{ 또는 } b & (a=b\text{일 때}) \\ b & (a<b\text{일 때}) \end{cases}$ 13. e^{-1} 14. $-5\frac{5}{36}$

15. $\frac{2}{3}x^2+3x+\frac{5}{3}$ 16. n 이 짝수일 때 $\frac{2}{n+1}a^{n+1}$, n 이 홀수일 때 $-\frac{2}{n+1}a^{n+2}$

17. $$\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$$

주어진 식＝

$$= \lim_{x \to 1}\left[1 + (x+1) + (x^2 + x + 1) + \cdots + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)\right]$$

$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

18. 주어진 식 $= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n^2-1)+2}{n+1} - an - b\right]$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[(n-1) + \frac{2}{n+1} - an - b\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n(1-a) + \frac{2}{n+1} - 1 - b\right] = 0$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} n(1-a) + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} - \lim_{n\to\infty}(1+b) = 0$

따라서 $\lim_{n\to\infty} n(1-a)$이 존재하지 않으면 주어진 식의 극한은 존재하지 않으므로 문제가 모순된다.

이로부터 $\lim_{n\to\infty} n(1-a)$의 극한은 반드시 존재한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 \Rightarrow b = -1,\ \lim_{n\to\infty} n(1-a) = 0$$

$\therefore\ a = 1,\ \ b = -1$

19. 1) $\mathrm{K_{PQ}} = \frac{x^3+1}{x+1} = x^2 - x + 1$

2) $\mathrm{K} = \lim_{x\to -1}\mathrm{K_{PQ}} = \lim_{x\to -1}(x^2 - x + 1) = 3$

3) $y + 1 = 3(x+1) \Rightarrow 3x - y + 2 = 0$

20. $f(1) = 2,\ 7f(2) = f(1) \Rightarrow f(2) = \frac{2}{7},\ 7f(3) = f(2) \Rightarrow f(3) = \frac{2}{7^2}$

$\therefore\ f(n) = \frac{2}{7^{n-1}}\ (n \in \mathrm{N})$ (수학적귀납법을 리용하여 증명할수 있다.)

$$\lim_{n\to\infty}[f(1) + f(2) + \cdots + f(n)] = \frac{2}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{7}{3}$$

21. $y = 0$ 이면 $n(n+1)x^2 - (2n+1)x + 1 = 0$

즉 $[(n+1)x - 1](nx - 1) = 0 \Rightarrow x_{\mathrm{P_1}} = \frac{1}{n+1},\ x_{\mathrm{P_2}} = \frac{1}{n}$

포물선이 x축을 끊어내는 선분의 길이를 d_1라고 하면

$$d_1 = \left|x_{P_2} - x_{P_1}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

∴ 2차함수의 그라프가 x축을 끊어내는 선분의 길이의 총합을 S 라고 하면

$$S = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

22. $f(1) = 1$ 이므로 $c = -1$

$$f'(x) = 3a(1-x)^2 \cdot (-1) + (-b),\ -3a - b = 2$$

$$f''(x) = -6a(1-x)\cdot(-1)$$

∴ $a = -\frac{1}{4},\ b = -\frac{5}{4}$

23. $a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = -1$

24. (그림 14-16)

$$\int_{-3}^{6}(|x| + 2)dx = 81$$

그림 14－16

25. 두 포물선은 y축에 관하여 대칭이므로

$$S_1 = 2\int_0^2\left[\left(-x^2 + 4\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)\right]dx = 16$$

직선 $y = a$와 $y = -x^2 + 4$의 사귐점의 자리표(그림 14-17)는

$$\left(\pm\sqrt{4-a},\ a\right)(0 < a < 4)$$

$$S_2 = 2\int_0^{\sqrt{4-a}}\left[-(x^2 + 4) - a\right]dx$$

$$= \frac{4(4-a)}{3}\sqrt{4-a} \quad (0 < a < 4)$$

문제의 의미로부터

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1,\quad \frac{4(4-a)}{3}\sqrt{4-a} = \frac{1}{2}\times 16$$

∴ $a = 4 \pm \sqrt[3]{36}$

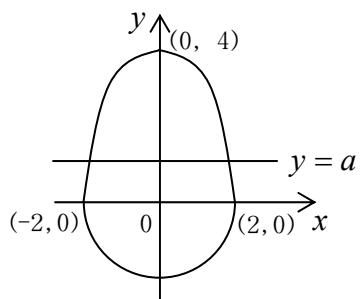
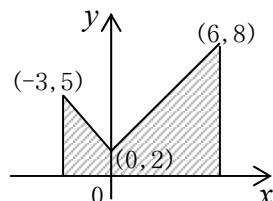



그림 14－17

$0 < a < 4$ 이므로 $a = 4 - \sqrt[3]{36}$

26. $\frac{256}{35}\pi$

3) 자체시험문제

1. C 2. D 3. C 4. C 5. D 6. $\frac{100}{891}$ 7. 0

8. $\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{C}$ (C는 상수) 9. 97 10. 3

11. 1) 직선 $3x + 4y - 4 = 0$ 이 x 축, y 축과 사귀는 사귐점을 각각 $\mathrm{A}(\frac{4}{3}, 0)$, B(0, 1)

반원 C_n과 $3x + 4y - 4 = 0$ 이 서로 접하는 접점을 T_n($n \in \mathrm{N}$) 이라고 하면 직3각형 AOB∽직3각형 $\mathrm{AT_1O_1}$이므로

$$\frac{r}{1} = \frac{\frac{4}{3} - r_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}$$

직3각형 $\mathrm{AT_2O_2}$∽직3각형 $\mathrm{AT_1O_1}$이므로

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\left(\frac{4}{3} - r_1\right) - (r_1 + r_2)}{\frac{4}{3} - r_1} \Rightarrow r_2 = \frac{1}{8}$$

같은 방법으로 직3각형 $\mathrm{AT_3O_3}$∽직3각형 $\mathrm{AT_2O_2}$

$\therefore\ r_3 = \frac{1}{32}$

2) $\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{4}$, $\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{4}$

일반적으로 $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{4}$

$\{r_n\}$은 같은비수렬이고 첫 마디는 $\frac{1}{2}$, 공통비는 $\frac{1}{4}$이므로

$$\mathrm{S}_n = \frac{\frac{1}{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2\pi}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$$

3) $\mathrm{S} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n = \frac{2\pi}{3}$

12. $7x - y + 7 - 0,\ 7x - y + 1 = 0$

13. $y'' = 36(x-1)^2 \cdot (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x)^3$

14. 1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$a \neq 0$일 때 $3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) = 0$

$f(x)$는 머물점 $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{2a}{3}$를 가진다.

$x_1 = 0,\ f(0) = -a,\ x_2 = -\frac{2}{3}a,\ f\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{27}a^3 - a$

극값점은 $(0,\ -a)$와 $\left(-\frac{2}{3}a,\ \frac{4}{27}a^3 - a\right)$

점 $(x_0,\ f(x_0))$의 자리길방정식은

$$x = 0 \text{과 } y = \frac{4}{27}\cdot\left(-\frac{3}{2}x\right)^3 + \frac{3}{2}x$$

즉 $x = 0$과 $y = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x$

$a = 0$일 때 $f(x) = x^3$

이때 $x = 0$은 $f(x)$의 극값점이 아니며 자리길방정식은 없다.

2) $a > 0$일 때 증가구간은 $\left(-\infty, -\frac{2a}{3}\right) \cup \left(-\frac{2a}{3},\ +\infty\right)$

감소구간은 $\left(-\frac{2a}{3},\ 0\right)$

$a < 0$일 때 증가구간은 $(-\infty, 0) \cup \left(-\frac{2a}{3},\ +\infty\right)$

감소구간은 $\left(0,\ -\dfrac{2a}{3}\right)$

$a=0$ 일 때 $y=x^3$ $(x\in\mathrm{R})$은 증가함수이다.

15. $a>-1$일 때 그림 14-18의 ㄱ), $a<-1$일 때 그림 ㄴ)과 같다.

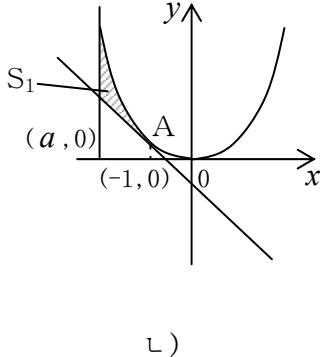
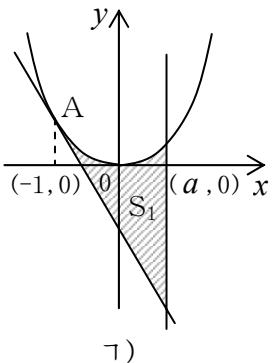



그림 14－18

$$\mathrm{S}_1=\int_{-1}^{a}\left(2x^2+4x+2\right)dx=\frac{2}{3}(a+1)^3$$

$$\mathrm{S}_2=\int_{a}^{-1}\left(2x^2+4x+2\right)dx=-\frac{2}{3}(a+1)^3$$

종합시험문제

△ 1차

1. $y=\log_2 x\ (0<x\le 1)$　2. $x<0$ 또는 $x>1$　3. $a_4=-\dfrac{1}{4}$　4. $2-i$　5. $\dfrac{24}{7}$

6. $45°$　7. $\dfrac{1}{3}$　8. $-\dfrac{2}{5}$　9. $y^2-\dfrac{x^2}{8}=1$

10. 12　11. B　12. C　13. B　14. C　15. A

16. A　17. B　18. D　19. B　20. B

21. (그림 14-19)

뜻구역 $x\ne 0$

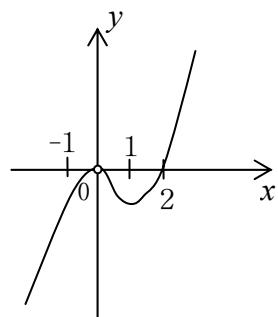



그림 14－19

값구역 $y=\begin{cases}(x-1)^2-1 & (x>0)\\ -(x-1)^2+1 & (x<0)\end{cases}$

22. 곡선에서 점 $P(3,\ 2)$를 지나는 곡선의 방향결수를 k라고 하면

$$k=x^2-2x \quad 즉 \quad k=3^2-6=3$$

접선의 방정식은 $y-2=3(x-3)$이므로 $3x-y-7=0$

23. 1) $\begin{cases}y=-x^2+2x+3\\ y=-2x+6\end{cases}$을 풀면 점 P의 자리표는 (1, 4)

따라서 빗선친 부분의 면적은

$$\int_1^3\left[\left(-x^2+2x+3\right)-\left(-2x+6\right)\right]dx=\frac{4}{3}$$

2) 회전체의 체적은

$$\pi\int_1^3\left[\left(-x^2+2x+3\right)^2-\left(-2x+6\right)^2\right]dx=\frac{32\pi}{5}$$

24. 1) (증명) $\frac{1}{\mathrm{S}_n}-\frac{1}{\mathrm{S}_{n-1}}=\frac{\mathrm{S}_{n-1}-\mathrm{S}_n}{\mathrm{S}_n-\mathrm{S}_{n-1}}=-\frac{a_n}{a_n}=-1$ (상수) $(n\geq 2)$

$$\frac{1}{\mathrm{S}_1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\left\{\frac{1}{\mathrm{S}_n}\right\}$은 첫 마디가 $\frac{1}{2}$이고 공통차가 －1인 같은차수렬이다.

2) $\frac{1}{\mathrm{S}_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times(-1)=\frac{3-2n}{2}$이므로 $\mathrm{S}_n=\frac{2}{3-2n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}n\cdot\mathrm{S}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3-2n}=1$$

25. 1) (증명) AE⊥평면 BCD이므로 BE는 AB의 평면 BCD에로의 사영이다.

BC⊥CD이므로 AB⊥CD(세 수직선의 정리)

2) 점 E를 지나 EF⊥BD되게 AF를 그으면 AF⊥BD

따라서 ∠AFE는 2면각 A－BD－C의 평면각이다.

△ABD에서 AB⊥AD이므로

$\mathrm{AF}=\dfrac{\mathrm{AB}\times\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}=\dfrac{12}{5}$, $\mathrm{BF}=\dfrac{9}{5}$, $\tan\angle\mathrm{DBC}=\dfrac{3}{4}$, $\mathrm{EF}=\dfrac{27}{20}$

$\therefore\ \angle\mathrm{AFE}=\arccos\dfrac{9}{16}$

3) $\mathrm{AE}=\dfrac{3}{4}\sqrt{7}$ 이므로 $S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$

$\therefore\ V=\dfrac{1}{3}SH=\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$

26. 1) $y=x+1$을 갈아넣으면 $x^2+2x+k(x^2-y^2)=0$ 즉

$$x^2+(2-2k)x-k=0$$

l과 곡선의 사귐점을 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$이라고 표시하면

$$x_1+x_2=2k-2,\ x_1\cdot x_2=-k$$

$$(x_1-x_2)^2=4k^2-4k+4,$$

$$(y_1-y_2)^2=(x_1-x_2)^2=4k^2-4k+4$$

$$\therefore\ |P_1P_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=8\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$$

$k=\dfrac{1}{2}$일 때 $|P_1P_2|_{\text{최소}}=\sqrt{6}$

2) 곡선의 방정식을 정리하면

$$(1+k)x^2+2x-ky^2=0$$

① $k=-1$일 때 $y^2=-2x$ 곡선은 포물선이다.

② $k=0$일 때 $x^2+2x=0$ 즉 $x=0$ 또는 $x=-2$ 두 평행선

③ $k\neq-1$이고 $k\neq0$일 때

$$\frac{\left(x+\dfrac{1}{1+k}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1+k}\right)^2}-\frac{y^2}{\dfrac{1}{k(1+k)}}=1$$

$\dfrac{1}{k(1+k)}>0$일 때 즉 $k>0$ 또는 $k<-1$일 때 쌍곡선,

$\frac{1}{k(1+k)}<0$ 이고 $\left(\frac{1}{1+k}\right)^2 \neq \frac{1}{k(1+k)}$ 일 때 즉 $-1<k<-\frac{1}{2}$

또는 $-\frac{1}{2}<k<0$ 일 때 타원,

$\frac{1}{(k+1)^2}=-\frac{1}{k(k+1)}$ 즉 $k=-\frac{1}{2}$ 일 때 $x^2+y^2+4x=0$ 은 원

△ **2차**

1. $y=-\sqrt{x+1}\ (x\geq -1)$ 2. $\cos\frac{1}{5}-\sin\frac{1}{5}$ 3. $-b\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

4. $[0,\ \sqrt{\pi}]$ 5. e^{-3} 6. $\alpha=30^\circ$ 7. $q=\frac{1}{3}$ 8. 72개 9. $\frac{4}{3}$

10. C 11. D 12. C 13. B 14. A 15. D 16. A 17. B

18. 그림 14-20과 같이 $|z+2|=1$ 은 중심이 (-2, 0)이고 반경이 1인 원을 표시한다.

$|z-1-3i|$ 는 원둘레의 점과 점 P(1, 3)의 최대값을 표시한다.

$|AP|=3\sqrt{2}$ 이므로

$$|PQ|=|z-1-3i|_{최대}=3\sqrt{2}+1$$

$$|PR|=|z-1-3i|_{최소}=3\sqrt{2}-1$$

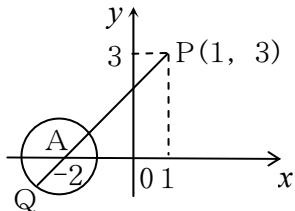



그림 14-20

19. 조건 $a>0,\ a\neq 1$ 로부터

1) $a>1$ 일 때 $\begin{cases} x>2 \\ (x-2)[x-(a+1)]>0 \end{cases} \Rightarrow x>a+1$

2) $0<a<1$ 일 때 $\begin{cases} 0<x<2 \\ x<a+1 \text{ 또는 } x>2 \end{cases} \Rightarrow 0<x<a+1$

따라서 1)과 2)를 종합하면 풀이모임은

$\{x|0<x<a+1,\ 0<a<1\}\cup\{x|x>a+1,\ a>1\}$

20. 1) 접점의 자리표는 $(x_1,\ x_1^2+3)$, 접선의 방향결수는 $2x_1$, 점 $A(1,\ 0)$을 지나는 접선의 방정식은

$$y-0=2x_1(x-1)$$

이로부터 $x_1^2+3=2x_1(x_1-1) \Rightarrow x_1=-1$ 또는 3, 점 P의 자리표는 (－1, 4), 점 Q의 자리표는 (3, 12)

따라서 AP의 방정식은 $y=-2(x-1)$, AQ의 방정식은 $y=6(x-1)$

$$\therefore\ S=\int_{-1}^{3}(x^2+3)dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 12$$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{3}+3x\Big|_{-1}^{3}-16=\frac{16}{3}$$

2) PQ의 방정식은 $y-4=\frac{12-4}{3+1}(x+1)$

즉 $y=2x+6$

$$\therefore\ V=\pi\int_{-1}^{3}\left[(2x+6)^2-(x^2+3)^2\right]dx=\frac{2048}{15}\pi$$

21. 1) BD의 가운데점 E를 잡고 AE, CE를 맺으면 △ABD, △BCD는 바른3각형이므로

$$AE\perp BD,\ CE\perp BD$$

따라서 BD⊥평면 AEC, BD⊂평면BCD이므로

평면 BCD⊥ 평면 AEC

즉 ∠AEC는 2면각 α－PQ－β의 평면각이다.

$\therefore$ AE＝$2\cdot\sin 60°=\sqrt{3}$

이로부터 점 A에서 평면 β에 수직선 AF를 그으면

$$AF=\sqrt{3}\cdot\sin 60°=\frac{3}{2}$$

2) 점 F에서 CD에 수직선 FH를 긋고 AH를 맺으면 ∠AHF는 2면각 A－CD－B의 평면각이다. 이로부터

$$AF=\frac{3}{2}$$

점 F가 BC의 가운데점이므로

$$FC=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \angle FCD=30°$$

$\therefore$ FH$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, $\tan\angle\text{AHF}=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}=2\sqrt{3}$

따라서 2면각 A－CD－B의 크기는 $\arctan 2\sqrt{3}$ 이다.

22. 1) $\left|z_1-\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right|=1$ 로부터 z_1 는 $\left(\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right)$를 중심으로 하고 반경이 1인 원둘레에 놓인다.

$\therefore\ 1\le\left|z_1\right|\le 3,\ 15^\circ\le\arg z_1\le 75^\circ,$

$$z_{n+1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}z_n=\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)z_n,\ \left|z_{n+1}\right|=\frac{1}{2}\left|z_n\right|$$

$$\angle\text{A}_n\text{OA}_{n+1}=60^\circ\ (n\in\text{N})$$

마찬가지로

$$\left|\text{OA}_3\right|=\frac{1}{2}\left|z_n\right|,\quad\angle\text{A}_2\text{OA}_3=60^\circ$$

따라서 $\triangle\text{A}_2\text{OA}_3$은 직3각형이다.

한편 $\triangle\text{A}_2\text{OA}_3\backsim\triangle\text{A}_1\text{OA}_2$로부터 변의 닮음비는 $\dfrac{1}{2}$, 면적비는 $\dfrac{1}{4}$, 같은 방법으로 $\triangle\text{A}_1\text{OA}_2\backsim\triangle\text{A}_2\text{OA}_3\cdots\triangle\text{A}_n\text{OA}_{n+1}$ 면적비는 $\dfrac{1}{4}$ 이다.

따라서 S_1, S_2, …, S_n, …은 무한같은비수렬을 이룬다. 공통비는 $q=\dfrac{1}{4}$, 첫마디는

$$\text{S}_1=\text{S}_{\triangle\text{A}_1\text{OA}_2}=\frac{1}{2}\left|\text{OA}_1\right|\cdot\left|\text{OA}_2\right|\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}\left|z_1\right|^2$$

$$\therefore\ \text{S}=\lim_{n\to\infty}(\text{S}_1+\text{S}_2+\cdots+\text{S}_n)$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{8}\left|z_1\right|^2}{1-\dfrac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\left|z_1\right|^2,\qquad\left|z_1\right|_{\max}=3$$

$\therefore\ S_{max} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

2) (1) $15^\circ \le \theta_1 < 60^\circ$일 때

$$w = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6$$
$$= \theta_1 + (\theta_1 + 60^\circ) + (\theta_1 + 120^\circ) +$$
$$+ (\theta_1 + 180^\circ) + (\theta_1 + 240^\circ) + (\theta_1 + 300^\circ) = 6\theta_1 + 900^\circ$$

$\therefore\ 990^\circ \le w < 1260^\circ$

(2) $60^\circ \le \theta_1 \le 75^\circ$일 때 $\theta_n \in [0^\circ, 360^\circ]$이므로

$$w = \theta_1 + (\theta_1 + 60^\circ) + (\theta_1 + 120^\circ) + (\theta_1 + 180^\circ)$$
$$+ (\theta_1 + 240^\circ) + (\theta_1 + 300^\circ - 360^\circ)$$
$$= 6\theta_1 + 540^\circ$$

$\therefore\ 900^\circ \le w \le 990^\circ$

(1)과 (2)로부터 $900^\circ \le w < 1260^\circ$